

Exercice 1 (12 points)

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.

Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.

En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.

Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite (a_n) .

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n -ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par: $v_n = a_n - 3000$.
 - (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
 - (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n .
 - (c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000$.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$

où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$, alors on a, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

On donne **en annexe** une partie de la courbe représentative (C) de la fonction f ainsi que la droite (d) d'équation $y = x$.

1. (a) Sur l'axe des abscisses, placer u_0 puis construire u_1, u_2 et u_3 en laissant apparents les traits de construction.
(b) Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?
2. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
3. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
(b) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

4. On admet que pour tout entier naturel n , $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
En déduire la limite de la suite (u_n) et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.
5. On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```

1 def seuil():
2     n=0
3     u=1
4     while(4-u)>0.0001:
5         u=(5*u+4)/(u+2)
6         n=n+1
7     return n

```

La valeur de n renvoyée par ce programme est 7.
À quoi correspond-elle ?

Exercice 2 (8 points)

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.

Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de l'arbre pondéré, donné **en annexe**, en y reportant les données de l'énoncé.
2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $0,056$ à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.

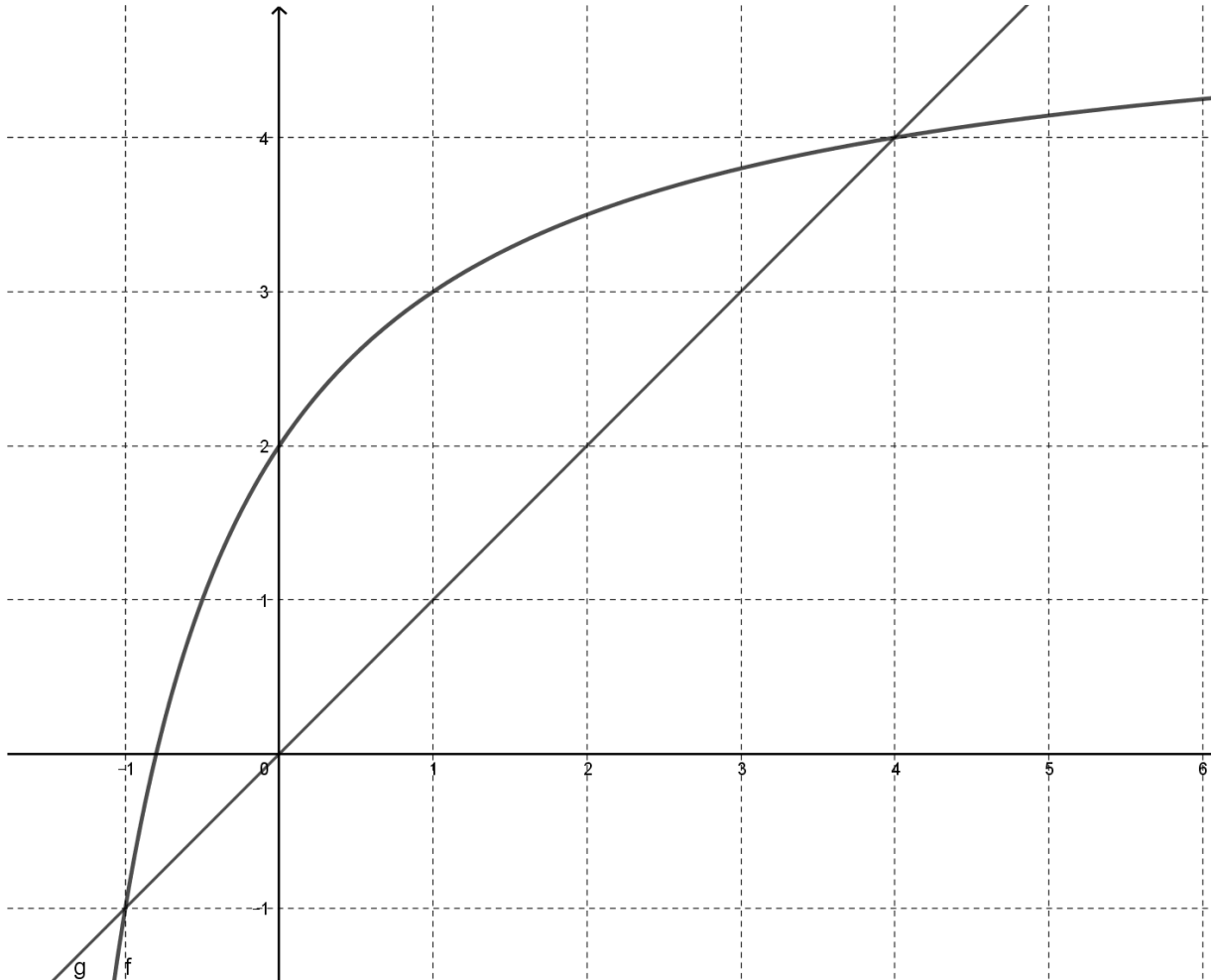
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.
Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

Annexe à rendre avec la copie

NOM :	Prénom :	Classe :
-------------	----------------	----------------

Exercice 1



Exercice 2

