Terminale S3	Évaluation de mathématiques n°4 Durée 1h35 mn	20 février 2019

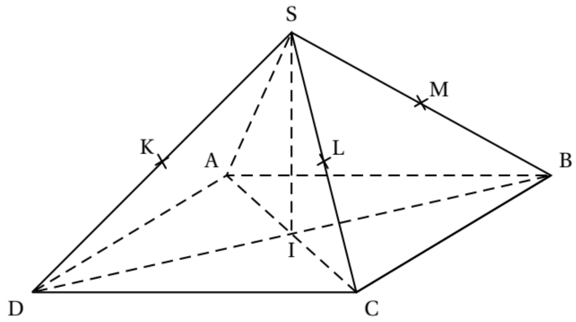
Exercice 1 *(6 points) TS_EDS_1_15_mars_2021_DV_2*

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un 1,5 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer **sur la copie** le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires:

a. (DK) et (SD)	**b.** (AS) et (IC)	**c.** (AC) et (SB)	**d.** (LM) et (AD)

- Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires; on élimine **a.**
- Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires; on élimine **b.**
- Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles; elles sont donc coplanaires; on élimine **d.**

Réponse c.

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $(I\,;\,\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IS}\,)$.

Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants:

$\mathrm{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\ \mathrm{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\ \mathrm{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\ \mathrm{C}(1\,;\,0\,;\,0);\mathrm{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\ \mathrm{S}(0\,;\,0\,;\,1).$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont:

a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$	***b.*** $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$	***c.*** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$	***d.*** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

- Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
- Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

Réponse b.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont:

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$	***b.*** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$	***c.*** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$	***d.*** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$A(-1\,;0\,;0)$ et $S(0\,;0\,;1)$ donc $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0-(-1)\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. **Réponse b.**

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est:

a. $\begin{cases} x & = -1-t \\ y & = t \\ z & = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$	**b.** $\begin{cases} x & = -1+2t \\ y & = 0 \\ z & = 1+2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$	**c.** $\begin{cases} x & = t \\ y & = 0 \\ z & = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$	**d.** $\begin{cases} x & = -1-t \\ y & = 1+t \\ z & = 1-t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AS}\ (1\ ;\ 0\ ;\ 1)$; la seule représentation qui convienne est la c.
Réponse c.

Exercice 2 (5 points)

Dans le cube ABCOEFGH ci-dessous on a placé les points M et N milieux respectifs des segments [AB] et [BC].
On se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$.

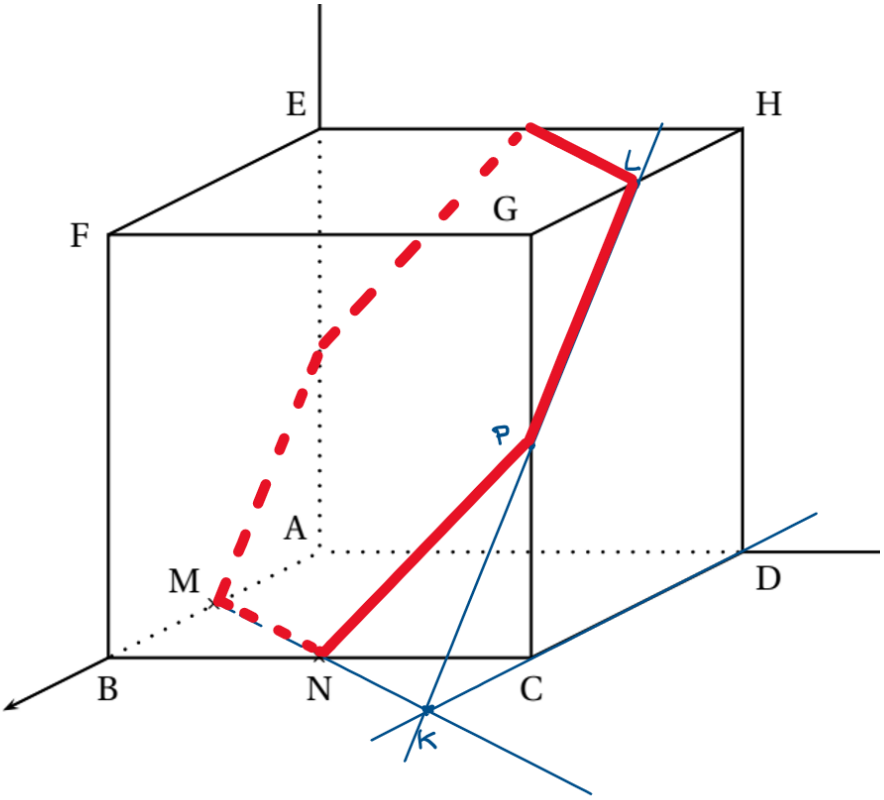
1) Placer le point L de coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;1\,;1\right)$.
2) Justifier que les droites (MN) et (CD) sont sécantes en un point K.
   Placer le point K sur la figure.

Les droites (MN) et (CD) sont coplanaires et non parallèles : elle sont donc sécantes en un point.

3) Montrer que les droites (KL) et (GC) sont sécantes suivant un point P.
   Placer le point P sur la figure.

Le point K appartient à la droite (CD) donc au plan $(CDHG)$ de plus $L \in (GH)$ donc $L \in (CDHG)$.
Par conséquent, la droite (KL) appartient au plan $(CDHG)$ et comme (KL) et (GC) ne sont pas parallèles, elles sont sécantes en un point.

4) Déduire de ce qui précède la construction de la section (en rouge) du cube $ABCOEFGH$ par le plan (MNL).
   Aucune justification n'est demandée



Exercice 3 (6 points)

On donne les points $F(1\,;\,-1\,;\,2)$ et $G(4\,;\,5\,;\,-3)$ et la droite d dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -4 + k \\ y = -11 + 2k \\ z = -1 - k \end{cases} \text{ où k est un réel.}$$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG).

Le vecteur $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$ dirige la droite (FG) et $F\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \in (FG)$ donc une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 6t \\ z = 2 - 5t \end{cases} \text{ où } t \text{ est un réel.}$$

2. Justifier que les droites d et (FG) ne sont pas parallèles.

Un coefficient directeur de la droite d est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}3\\6\\-5\end{pmatrix}$ dirige la droite (FG). Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. En effet, $\frac{2}{6} \neq \frac{-1}{-5}$.

Par conséquent les droites ne sont pas parallèles.

3. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection H.

Les coordonnées de H doivent vérifier les deux représentations paramétriques de d et de (FG) de manière simultanée. On a alors :

$$\begin{cases} -4 + k = 1 + 3t \\ -11 + 2k = -1 + 6t \\ -1 - k = 2 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3t + 5 \\ -11 + 2(3t + 5) = -1 + 6t \\ -1 - (3t + 5) = 2 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3t + 5 \\ 6t - 1 = -1 + 6t \\ -3t - 6 = 2 - 5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = 3t + 5 \\ 2t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 17 \\ t = 4 \end{cases}$$

En remplaçant t par 4 ou k par 17, on obtient $H(13\,;23\,;\,-18)$.

Exercice 4 (3 points)

On considère les droites d et d' données par leurs représentations paramétriques suivantes.

$$d\ \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 3 + 4k \\ z = -5 + 6k \end{cases} \text{ et } d'\ \begin{cases} x = -5 + t \\ y = 15 - 2t \\ z = 13 + 3t \end{cases} \text{ où } k \text{ et } t \text{ sont réels.}$$

Déterminer quelle est leur position relative.

Les vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\4\\6\end{pmatrix}$ est directeur de d et $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ est directeur de d'.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

En effet, $\frac{-2}{1} = -2 \;\; et \;\; \frac{6}{3} = +2$. Donc $\frac{-2}{1} \neq \frac{6}{3}$.

Les droites ne sont donc pas parallèles.

Les coordonnées de l'éventuel point d'intersection doivent vérifier les deux représentations paramétriques de d et de d' de manière simultanée. On a alors :

$$\begin{cases} 1-2k & = & -5+t \\ 3+4k & = & 15-2t \\ -5+6k & = & 13+3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = & -2k+6 \\ 3+4k & = & 15-2(-2k+6) \\ -5+6k & = & 13+3(-2k+6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = & -2k+6 \\ 3+4k & = & 15+4k-12 \\ -5+6k & = & 13-6k+18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t & = & -2k+6 \\ 3 & = & 3 \\ 12k & = & 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = & 0 \\ k & = & 3 \end{cases}$$

En remplaçant t par 0 ou k par 3, on obtient les coordonnées du point d'intersection $(-5\,;15\,;\ 13)$.