Première Spé S3	Évaluation de mathématiques n°4 Dérivées et variations (1h45 mn)	Jeudi 2 décembre 2021

Exercice 1

4 points

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$a)\ f(x) = 3x - 2 \qquad b)\ g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5 \qquad c)\ h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+3}$

$a)\ f'(x) = 3 \times 1 + 0 = 3$

$b)\ g'(x) = 3 \times 3x^2 + 2 \times 2x - 0 = 9x^2 + 4x$

$c)\ h'(x) = \dfrac{2x(x^3+3) - (x^2+1)(3x^2)}{(x^3+3)^2} = \dfrac{2x^4 + 6x - 3x^4 - 3x^2}{(x^3+3)^2} = \dfrac{-x^4 - 3x^2 + 6x}{(x^3+3)^2}$

Exercice 2

10 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 8x^2 + 5x + 2$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1) Calculer la fonction dérivée de f puis étudier son signe.

$$f'(x) = 3x^2 + 16x + 5$$

f' est une fonction polynôme du second degré : $\Delta = 16^2 - 4 \times 3 \times 5 = 256 - 60 = 196 = 14^2 > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 : $x_1 = \frac{-16+14}{6} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{-16-14}{6} = -5$.

Obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{3}$		$-\infty$
Signe de $3x^2 + 16x + 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) En déduire les variation de f puis dresser son tableau de variation.

Le signe de f' est maintenant connu donc :

- f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-5]$ et sur $\left[-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.
- f est strictement décroissante sur $\left[-5\,;\,-\frac{1}{3}\right]$.

On obtient alors de tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-5		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	52	$\searrow$	$\frac{32}{27}$	$\nearrow$	

3) Montrer que la fonction f admet deux extremum dont vous donnerez la valeur exacte.

La dérivée de f s'annule en changeant de signe en $x = -5$ et en $x = -\frac{1}{3}$ donc la fonction f admet deux extremum. Un maximum en $x = -5$ valant $f(-5) = 52$ et un minimum en $x = -\frac{1}{3}$ valant $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP

X	Y_1
-5	52
$\frac{-1}{3}$	$\frac{32}{27}$

4) Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution puis donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.

- Sur l'intervalle $[-5\,;\,+\infty[$ on a $f(x) \geq \frac{32}{27} > 0$ donc la fonction f ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-5]$ la fonction f est strictement croissante et change de signe (par exemple $f(-10) = -248 < 0$ et $f(-5) = 52 > 0$) donc la courbe C_f va couper une fois l'axe des abscisses et donc $f(x)$ s'annule une fois.

On peut donc déduire de ces deux points que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

A l'aide de la calculatrice on trouve $-7{,}357$ à 10^{-3} près.

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y_1
-10	-248
-9	-124
-8	-38
-7	16
-6	44
-5	52
-4	46
-3	32
-2	16
-1	4
0	2

X= -10

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y_1
-8	-38
-7.9	-31.26
-7.8	-24.83
-7.7	-18.71
-7.6	-12.9
-7.5	-7.375
-7.4	-2.144
-7.3	2.803
-7.2	7.472
-7.1	11.869
-7	16

X= -8

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y_1
-7.4	-2.144
-7.39	-1.637
-7.38	-1.132
-7.37	-0.63
-7.36	-0.131
-7.35	0.3646
-7.34	0.8579
-7.33	1.3484
-7.32	1.836
-7.31	2.3209
-7.3	2.803

X= -7.4

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
APP SUR + POUR △Tbl

X	Y_1
-7.36	-0.131
-7.359	-0.082
-7.358	-0.032
-7.357	0.0177
-7.356	0.0673
-7.355	0.1169
-7.354	0.1665
-7.353	0.2161
-7.352	0.2656
-7.351	0.3151
-7.35	0.3646

X= -7.36

5) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $x = 0$.

L'équation générale de la tangente T est $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$.

$f(0) = 2$ et $f'(0) = 5$ donc $T : y = 5x + 2$

6) Résoudre l'inéquation $f(x) > 5x + 2$.

Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat.

$$f(x) > 5x + 2 \Leftrightarrow f(x) - 5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x^3 + 8x^2 + 5x + 2 - 5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x^3 + 8x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x + 8) > 0$$

On sait que $x^2 \geq 0$ et $x + 8 > 0 \Leftrightarrow x > -8$ donc :

$$f(x) > 5x + 2 \Leftrightarrow x > -8$$

Graphiquement, ceci signifie que C_f est au-dessus de la tangente T d'équation $y = 5x + 2$ pour tout réel x strictement supérieur à -8.

Exercice 3

5 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ par $g(x) = \frac{x+8}{2-3x}$ et C_g sa courbe représentative dans un repère.

1) Justifier que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

g est quotient, il faut donc que son dénominateur soit non nul donc que $2 - 3x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \frac{2}{3}$.

Donc la fonction g est définie pour tout réel différent de $\frac{2}{3}$ ce qui peut se noter $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

2) Montrer que $g'(x) = \frac{26}{(2-3x)^2}$ et en déduire son signe.

On utilise la formule du quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$g'(x) = \frac{1 \times (2-3x) - (x+8) \times (-3)}{(2-3x)^2} = \frac{2-3x+3x+24}{(2-3x)^2} = \frac{26}{(2-3x)^2}$$

$26 > 0$ et $(2-3x)^2 > 0$ donc $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$.

3) Dresser le tableau de variation de g.

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ $g'(x) > 0$ donc la fonction g est strictement croissante sur $\left]-\infty\,; \frac{2}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{2}{3}\,; +\infty\right[$ On peut donc dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$	$?$	$\nearrow$	$? \Vert ?$	$\nearrow$	$?$

4) La fonction g admet-elle des extremums ? (justifier)

La dérivée ne s'annule pas et ne change pas de signe donc il n'y a pas d'extremum.

1+2 points

Exercice 4 - Tout résultat donné sans justification ne sera pas pris en compte

Une météorologue envoie à 7h00 du matin un ballon sonde auquel sont attachés des instruments de mesures. Ce ballon va monter et, tout en montant il va gonfler, jusqu'à une altitude maximum où il explosera et retombera progressivement au sol freiné par un petit parachute.

L'altitude, exprimée en km, de ce ballon sonde en fonction du temps, exprimé en heures, est modélisé par la fonction h définie sur [0 ; 1,7] par $h : x \mapsto -12x^3 + 36x$.

À quelle heure atteindra-t-il son altitude maximum ?

Et quelle est cette altitude maximum ?

Pour déterminer l'altitude maximale, il faut étudier les variations de la fonction h.

$$h'(x) = -12 \times 3x^2 + 36 = -36x^2 + 36 = 36(1 - x^2) = 36(1 - x)(1 + x)$$

h' est une fonction polynôme du second degré qui admet 1 et -1 comme racines avec $a = -36 < 0$.

On peut donc dresser le tableau de signe de h' en se limitant à l'intervalle [0 ; 1,7].

x	$-\infty$		-1		0		1		1.7		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	

On peut alors dresser le tableau des variations de h sur [0 ; 1,7].

x	0		1		1.7
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	24	$\searrow$	2.244

La dérivée h' s'annule en changeant de signe en $x = 1$ donc h admet un extremum (ici un maximum).

$$h(1) = 24$$

C'est donc au bout d'une heure (à 8h00) que l'altitude du ballon sera maximale : 24 km.