FONCTIONS AFFINES

I. Définitions et propriétés

Voici les tarifs d'entrée pour un stade de football :

Tarif 1 : 8 € l'entrée
Tarif 2 : 4 € l'entrée avec la carte demi-tarif qui coûte 40 €
Tarif 3 : L'abonnement pour la saison qui coûte 92 €

1) Calculer pour chaque tarif, la dépense pour 6 entrées, 11 entrées puis 15 entrées.
Dans chaque cas, quel est le tarif le plus intéressant ?

2) Soit x le nombre d'entrées. Exprimer en fonction de x la dépense pour la saison pour chaque tarif.

1) Tarif le plus intéressant :

x entrées	$x = 6$	$x = 11$	$x = 15$
Tarif 1			
Tarif 2			
Tarif 3			

Définitions : a et b étant deux nombres fixés.
Une fonction de la forme :

$x \longmapsto ax + b$ est appelée ……………………
$x \longmapsto ax$ est appelée ………………………..
$x \longmapsto b$ est appelée …………………………
.

Propriété : Une fonction linéaire est une fonction affine telle que … … … … ….

3) a) Avec le tarif 2, calculer le prix dépensé pour 18 entrées.
b) Calculer de même : $f(2)$, $h(2)$, $g(4)$, $g(7)$ et $f(10)$.
c) Trouver x tel que $g(x) = 84$. Interpréter le résultat.

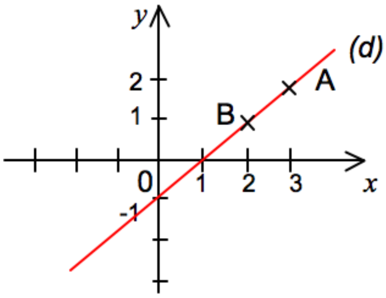
4) a) Pour chaque tarif, représenter sur un même graphique la dépense en fonction du nombre d'entrées.
b) Répondre en utilisant le graphique :
Dans quels cas, vaut-il mieux choisir un tarif plutôt qu'un autre ?

Propriétés :

1) Toute fonction affine est représentée par ……………….
2) Une fonction linéaire est représentée par …..………………………….
3) Une fonction constante est représentée par ……………………………………..

II. Fonction affine et droite associée

Exemple :

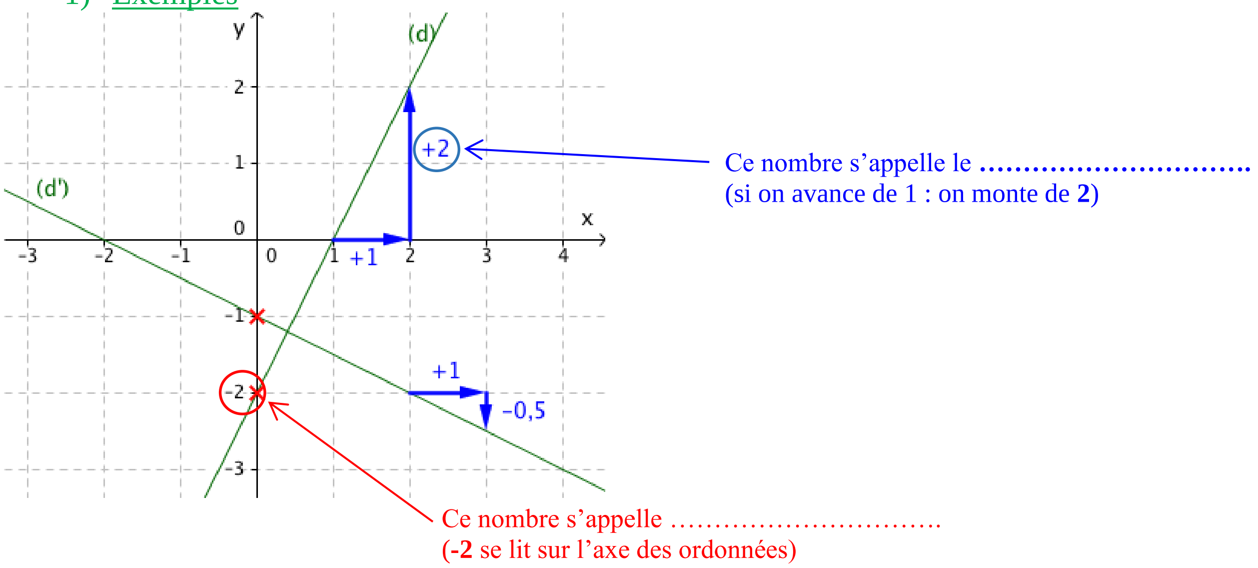


Soit (d) la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = x - 1$
Alors les coordonnées $(x\,;\,f(x))$ d'un point M appartenant à la droite (d) vérifient $f(x) = x - 1$.
Les points $A(3\,;\,2)$, $B(2\,;\,1)$ et $C\left(\frac{9}{2}\,;\,1\right)$ appartiennent-ils à la droite (d) ?

Soit une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ représentée dans un repère par une droite d.
Les coordonnées $(x\,;\,f(x))$ d'un point M appartenant à d vérifient … … … … … … … … … ….

III. Coefficient directeur et ordonnée à l'origine

1) Exemples



Pour (d) : Le coefficient directeur est …..
L'ordonnée à l'origine est ……..

L'expression de la fonction f, représentée par la droite (d), est : $f(x) =$ ……………

Pour (d') : Le coefficient directeur est ………
L'ordonnée à l'origine est ……….

L'expression de la fonction g, représentée par la droite (d'), est : $g(x) =$ … … … … … …

2) Définitions

La droite (d), qui représente la fonction f définie par $f(x) = ax + b$, a pour **coefficient directeur …..** et pour **ordonnée à l'origine …….**.

Remarques :
- Si le coefficient directeur est ***positif***, alors on « **…………** » sur la droite en la parcourant de gauche à droite. On dit que la fonction affine associée est **…………………..**.
- Si le coefficient directeur est **……………,** alors on « **………………..** » sur la droite. On dit que la fonction affine associée est **………………………..**.

3) Accroissements

Propriété des accroissements :

Si $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ sont deux points de la droite (d) représentant la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ alors :

$$\boldsymbol{a = \ \dots\ \dots\dots\dots\dots\dots.}$$

Conséquence :

f est une fonction affine de la forme $f(x) = ax + b$.

Si x_1 et x_2 sont deux nombres tels que $x_1 \neq x_2$, alors : $a = $ **… … … … … … ….**

Exemple :

On considère la fonction affine f telle que $f(2) = 3$ et $f(5) = 4$.

Le coefficient directeur de la droite représentative de f est égal à :

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

IV. Déterminer une fonction affine à partir de deux images

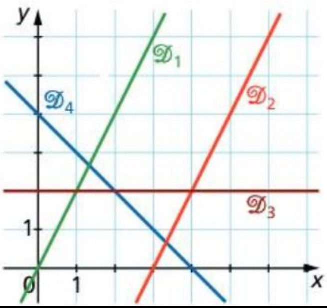
Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Déterminer la fonction affine f vérifiant : $f(2) = 4$ et $f(5) = 1$

Exercices

1 ★ On donne cinq fonctions affines :
- $f(x) = -x + 4$
- $g(x) = 2$
- $h(x) = 2x$;
- $j(x) = -2x + 4$
- $k(x) = 2x - 6$.

1. Parmi les quatre droites tracées ci-dessous, indiquer celle qui représente la fonction g et celle qui représente la fonction k :



2. L'une des fonctions est linéaire : laquelle ? Quelle droite la représente ?

3. a) Indiquer le sens de variation de la fonction affine représentée par la droite $\mathcal{D}_4$.

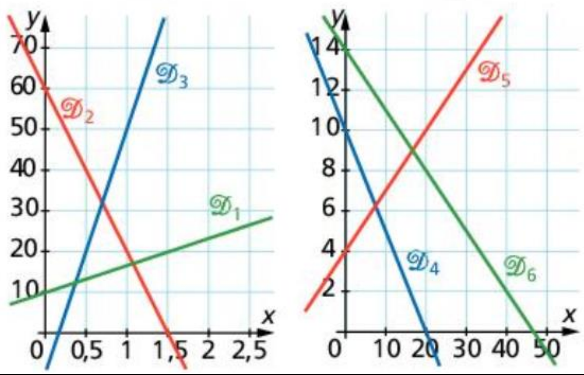
b) Quelle fonction affine est représentée par $\mathcal{D}_1$?

4. Par lecture graphique, puis par le calcul, résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.

2 ★ **a)** Déterminer le coefficient directeur de chacune des droites tracées. *Attention aux unités.*

b) Écrire l'expression de la fonction affine qu'elle représente.

① ②



3 ★ Sur le marché de Marseille, la demande y d'ananas du Ghana, en tonnes, est modélisée par la fonction $f(p) = -200\,p + 280$, pour un prix p entre 0,65 et 0,90 € par kg.

a) Déterminer la demande pour un prix de 0,80 €.

b) Calculer la variation absolue de la demande si le prix passe de 0,65 € à 0,90 €.

c) Déterminer le prix du marché si la demande est de 140 tonnes.

d) Exprimer le prix p en fonction de la demande y, sous la forme $p = g(y) = a'y + b'$.

Quel est le sens de variation de g ?

4 ★ Dans chaque petit problème, exprimer le coût total $f(x)$ pour x articles fabriqués sous la forme

$$f(x) = ax + b\,.$$

a) Tout article a un coût unitaire de 10,5 €.

b) Pour 30 articles fabriqués, au même coût unitaire, le coût total est de 105 €.

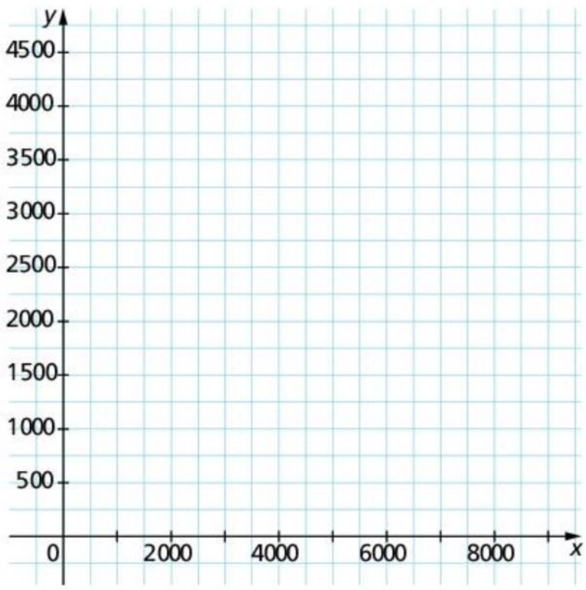
c) Le coût est de 450 € pour 20 articles et il est de 905 € pour 46 articles.

5 ★ Dans une entreprise, trois catégories de salariés A, B et C reçoivent un salaire mensuel brut, fonction du nombre x de produits vendus par mois.

	Fixe	Par produit	Fonction
A	2 500 €	0,20 €	$f(x) = \ldots$
B	2 000 €	0,30 €	$g(x) = \ldots$
C	4 100 €	0 €	$h(x) = \ldots$

a) Déterminer les fonctions f, g et h correspondant à ces salaires mensuels.

b) Représenter ces trois fonctions ci-dessous :



c) À partir de quelle quantité de produits vendus, le salaire de B devient-il supérieur au salaire de A ? au salaire de C ?

d) Déterminer par le calcul le nombre de produits à vendre pour que le salaire de B soit égal à 3 935 €.

6 ★ Le gérant d'un magasin constate qu'il a vendu 40 tee-shirts de la collection précédente au prix de 20 € pièce. S'il propose une remise de 30 % sur le prix, il constate que ses ventes augmentent de 45 %. On suppose que le nombre de tee-shirts vendus peut être modélisé par une fonction affine f, fonction du prix p.

a) Déterminer $f(p)$. Calculer $f(12)$ et interpréter.

b) Déterminer le prix par pièce pour une vente de 46 tee-shirts.

7 ★★ À l'occasion des soldes, un commerçant applique une remise de 25 % sur tout le magasin.

1. a) Donner la fonction linéaire exprimant le prix soldé $f(x)$ en fonction du prix initial x.

b) Calculer le prix initial d'un pull dont le prix soldé est de 19,80 €.

2. Sanghavi, de passage en France en décembre 2014, effectue ses achats dans ce magasin et demande à bénéficier de l'exonération de la TVA dont le taux est fixé à 20 %.

a) Calculer le prix payé par Sanghavi pour un manteau dont le prix TTC non soldé est 240 €.

b) Déterminer la fonction linéaire exprimant le prix soldé et détaxé $g(x)$ en fonction du prix initial x.

c) Déterminer le prix TTC non soldé de ses achats dans ce magasin, payés 300 €.

9 ★★ Du 6 octobre au 10 octobre 2014, le CAC 40 est passé de 4286,5 points à 4073,7 points.

a) Calculer sa variation absolue entre ces deux dates. En déduire l'accroissement journalier moyen.

b) Calculer son taux d'évolution global.

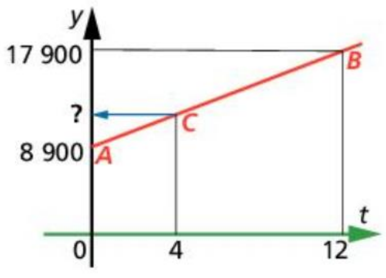
c) Par interpolation linéaire, déterminer une estimation de la valeur du CAC 40 le 9 octobre.

8 ★★ La production de fromage de chèvre frais est passée de 8 900 tonnes en 2000 à 17 900 tonnes en 2012. On souhaite faire une estimation de cette production en 2004.

1. Calculer l'accroissement moyen par an de la production de fromage de chèvre frais entre les années 2000 et 2012.

2. On suppose que la production de fromage de chèvre frais peut être modélisée par une fonction affine f, où t est le nombre d'années écoulées depuis 2000.

La droite représentant la fonction f est tracée ci-contre :



On note les points $A(0\,;8\,900)$; $B(12\,;17\,900)$ et $C(4\,;y)$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

Droite	Coefficient directeur
(AB)	$\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = \dfrac{17\,900 - 8\,900}{12 - 0} = \ldots$
(AC)	$\dfrac{y - 8\,900}{4 - 0} = \ldots$

b) En déduire une équation d'inconnue y, puis la résoudre. En déduire une estimation de la production de fromage de chèvres frais en 2004.

Une telle méthode est une **interpolation linéaire**.

3. Par interpolation linéaire, estimer la production y de fromage de chèvre frais en 2008. Répondre à ce problème en utilisant le tableau ci-dessous :

Production	8 900	y	17 900	$\Delta y = \ldots$
$2000 + t$	0	8	12	$\Delta t = \ldots$