Devoir Commun numéro 2

Exercice 1 (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question une seule réponse est exacte. Une mauvaise réponse ou une absence de réponse n'enlève aucun point. La bonne réponse rapporte un point. Il n'est pas demandé de justification.

Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre (A, B, C ou D) correspondant à votre réponse

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2+2x+1>0$, où x est un nombre réel, est :

A	B	**C**	D
$\left\{-\frac{1}{3};1\right\}$	$\emptyset$	$\boldsymbol{\left]-\frac{1}{3};1\right[}$	$\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

Pour les experts !

$-3x^2+2x+1>0$ est une inéquation du second degré.

$a=-3\ ,\ b=2\ et\ c=1$ donc $\Delta=2^2-4\times(-3)\times 1=4+12=16$

Comme $\Delta>0$, $-3x^2+2x+1$ change de signe de part et d'autre de ses deux racines qui sont :

$x_1=\frac{(-2+\sqrt{16})}{2\times(-3)}=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$ et $x_2=\frac{(-2-\sqrt{16})}{2\times(-3)}=\frac{-6}{-6}=1$.

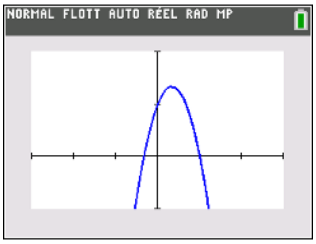
Le signe de a étant strictement négatif, on obtient alors le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-1/3$		1		$+\infty$
$Signe$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $-3x^2+2x+1>0 \iff x\in\left]-\frac{1}{3};1\right[$.

Pour les futés !

A l'aide de la calculatrice.



La parabole est strictement au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left]-\frac{1}{3};1\right[$

(c'est la seule proposition qui convienne !)

2. On considère une fonction f polynôme du second degré dont le tableau de signes est donné ci-après :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Une expression de $f(x)$ peut être :

A	B	**C**	D
$2x^2+5x-2$	$-x^2+1$	**- $\boldsymbol{x^2+x+2}$**	x^2+x-2

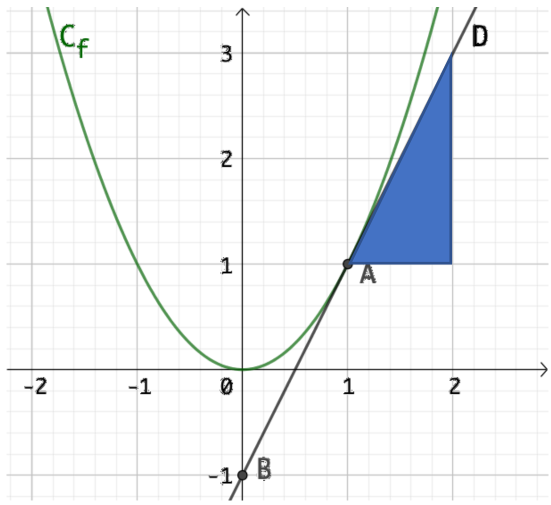
D'après le tableau de signes, f s'annule en -1 et 2 or seule la c) s'annule en 2 : 16 pour la a) , -3 pour la b) et 4 pour la d) .

3. On considère la fonction g sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x^2 + 4x$. Alors :

A	**B**	C	D
Le minimum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 4	**Le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 4**	Le maximum de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est 2	g est décroissante sur l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$

g est un polynôme du second degré qui s'écrit sous la forme $ax^2 + bx + c$.
Comme $a = -1 < 0$, l'ordonnée du sommet de la parabole est le maximum de la fonction et son abscisse est donnée par $x = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{-1} = 4$.

4. On considère la fonction f dont la représentation graphique C_f est donnée ci-contre. La droite D est la tangente à C_f au point $A(1; 1)$. Le point $B(0; -1)$ appartient à la droite D. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal à :

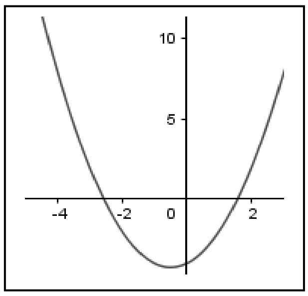


A	B	**C**	D
1	$\frac{1}{2}$	**2**	-2

$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente D.
Par lecture graphique, celui-ci est égal à 2.

5. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels. Δ désigne la quantité $b^2 - 4ac$.
Parmi les affirmations suivantes, laquelle est cohérente avec la représentation graphique, ci-contre, de cette fonction ?



A	B	C	D
$\boldsymbol{a > 0 \;\; et \;\; \Delta > 0}$	$a < 0 \;\; et \; \Delta < 0$	$a > 0 \;\; et \; \Delta < 0$	$a < 0 \;\; et \; \Delta > 0$

D'après le graphique $a > 0$ car les « bras » de la parabole sont orientés vers le haut et $\Delta > 0$ puisque la parabole coupe deux fois l'axe des abscisses ce qui prouve que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions distinctes.

Exercice 2 (5 pts)

Un pépiniériste stocke un grand nombre d'arbustes de la famille des *viburnum* en vue de les vendre. Ceux-ci sont de deux espèces différentes : les *viburnum tinus* (nom commun : laurier tin) et les *viburnum opulus* (nom commun : boule de neige). Il constate que :

- 80 % de ses arbustes sont des lauriers tins, les autres sont des boules de neige.
- Parmi les lauriers tins, 41 % mesurent 1m10 ou plus.
- Parmi les boules de neige, 32 % mesurent 1m10 ou plus.

1. Est-il vrai que moins de 15% des *viburnum* de ce pépiniériste sont des boules de neige de moins de 1m10 ?

Les boules de neiges représentent 20 % des *viburnum* et parmi les boules de neige, 68 % mesurent moins de 1m10 (100%-32%) donc 68% des 20% ou encore $0{,}68 \times 0{,}2 = 0{,}136$ c'est-à-dire 13,6 %.
C'est donc VRAI.

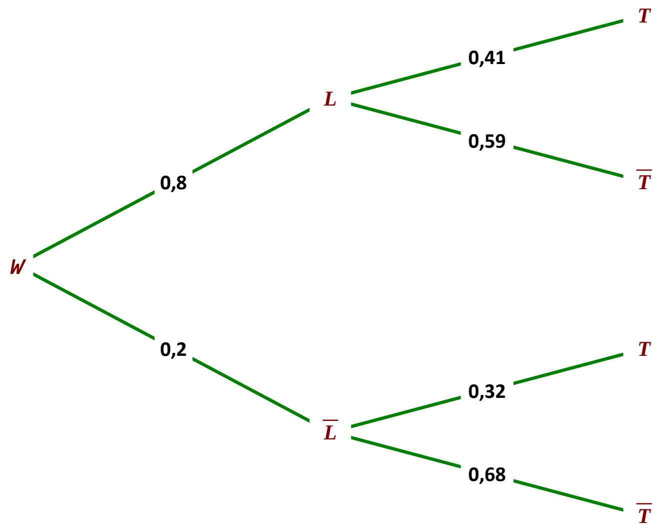
On choisit au hasard un *viburnum* chez ce pépiniériste et on considère les événements suivants :

L : « le *viburnum* choisi est un laurier tin »
T : « le *viburnum* mesure plus de 1m10 ».

2. Décrire par une phrase la probabilité $P_L(\overline{T})$. Décrire également par une phrase l'événement $\overline{L} \cap T$.

$P_L(\overline{T})$ est la probabilité que parmi les lauriers tins, il y'en ait qui mesurent moins de 1m10.
$\overline{L} \cap T$ est l'évènement : « le *viburnum* choisi est une boule de neige et mesure plus de 1m10 ».

3. Recopier et compléter sur la copie l'arbre de probabilité ci-dessous traduisant les données de l'énoncé.



4. Montrer que la probabilité que le *viburnum* mesure 1m10 ou plus est égale à 0,392.

On nous demande de déterminer $P(T)$.
D'après l'arbre ci-dessus, $P(T) = P(T \cap L) + P(T \cap \overline{L}) = 0{,}8 \times 0{,}41 + 0{,}2 \times 0{,}32 = 0{,}392$

Exercice 3 (5 pts)

En France métropolitaine, 2018 a été l'année la plus chaude d'après les relevés météorologiques. La température moyenne y a été de 14 °C; elle a dépassé de 1,4 °C la normale de référence calculée sur la période 1981-2010. *(Source : site Météo France)*

1. Pour modéliser la situation, on considère l'année 2018 comme l'année zéro et on suppose que cette hausse moyenne de 1,4°C par an se poursuit chaque année. Pour tout entier naturel n, on note alors T_n la température moyenne annuelle en France pour l'année 2018+n.

a. Quelle est la nature de la suite (T_n) ainsi définie ? On donnera son premier terme et sa raison.

Chaque année la température moyenne annuelle T_n augmente de 1,4 °C donc $T_{n+1} = T_n + 1{,}4$.
Ceci est la définition d'une suite arithmétique de raison 1,4 et de premier terme $T_0 = 14$ (température en 2018)

b. On considère qu'au-delà d'une température moyenne de 35°C les corps ne se refroidissent pas et il devient insupportable pour les humains de continuer à habiter cette région que l'on qualifie alors d'inhabitable. Selon le modèle considéré, en quelle année la France deviendrait-elle inhabitable pour les humains ? Justifier.

On cherche le rang de l'année n pour laquelle $T_n \geq 35$.
Comme la suite est arithmétique, $T_n = T_0 + n \times r$ soit ici : $T_n = 14 + 1{,}4n$.
Ainsi : $T_n \geq 35 \iff 14 + 1{,}4n \geq 35 \iff 1{,}4n \geq 21 \iff n \geq 15$.
Or $2018 + 15 = 2033$, c'est donc à partir de 2033 que la France deviendrait inhabitable pour les humains.

2. À cause du réchauffement climatique, certaines régions risquent de connaître une baisse de 10 % par an des précipitations moyennes annuelles mesurées en millimètres (mm).
Dans une région du nord de la France, les précipitations moyennes annuelles étaient de 673 mm en 2018. On considère l'année 2018 comme l'année zéro et on suppose que cette baisse de 10 % par an se poursuit chaque année. Pour tout entier naturel n, on note P_n les précipitations annuelles moyennes en mm dans cette région pour l'année 2018+n.

a. Quelle est la nature de la suite (P_n) ainsi définie ? On donnera son premier terme et sa raison.

Une augmentation annuelle de 10 % se traduit par : $P_{n+1} = P_n - 10\%P_n = (1 - 10\%)P_n = 0{,}9 \times P_n$.
Par définition, la suite P_n est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme $P_0 = 673$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer P_n en fonction de n.

On sait que si une suite u est géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Dans le cas de la suite P on a donc :

$$P_n = 673 \times (0{,}9)^n$$

c. On donne le programme *Python* suivant :

```
def precipitations(J):
    I=673
    n=0
    while I > J:
        I = 0.9*I
        n = n+1
    return n+2018
```

L'exécution de « precipitations(300) » renvoie la valeur 2026 . Que représente cette valeur pour le problème posé ?
2026 correspond à la première année durant laquelle les précipitations seront inférieures ou égales à 300 mm.

Exercice 4 (5 points)

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [– 1 ; 5] par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

1. Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer, pour tout *nombre* réel x de $[-1; 5]$, l'expression de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 9 \times 1 + 0 = 3x^2 - 12x + 9$$

2. Montrer que pour *tout* nombre réel x de $[-1; 5]$, $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$.

$$3(x-1)(x-3) = 3(x^2 - 3x - x + 3) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9 = f'(x)$$

3. Dresser le tableau *de* signe de $f'(x)$ sur $[-1; 5]$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur ce même intervalle.

f' est un polynome du second degré dont les racines sont 1 et 3 (d'après la factorisation précédente).
De plus $a = 3 > 0$, donc f' est positive à l'extérieur des racines et négative entre les racines.
On peut donc en déduire le signe de f' ainsi que les variations de f:

x	-1		1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	21

4. Déterminer *l'équation* de la tangente T à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0.

L'équation générale de la tangente au point de la courbe d'abscisse x_0 est donnée par :

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$

Ici $x_0 = 0$ donc $f'(x_0) = 3 \times 0^2 - 12 \times 0 + 9 = 9$ et $f(0) = 1$.
L'équation réduite de T est donc : $y = 9(x - 0) + 1$ c'est-à-dire $\boxed{y = 9x + 1}$

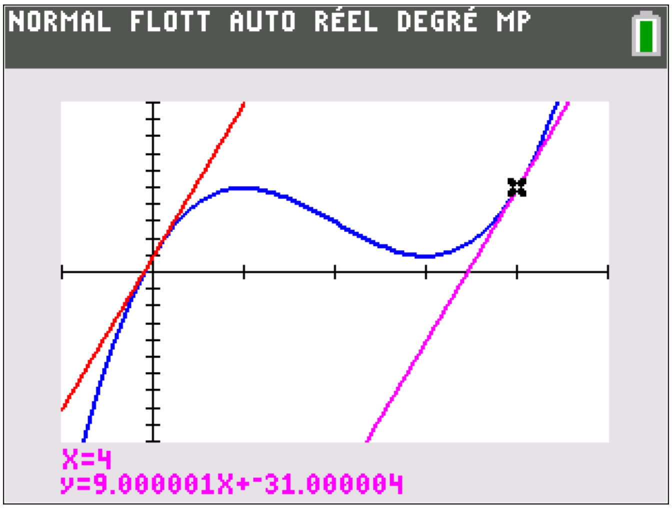
5. Déterminer l'autre point de la courbe de f en lequel la tangente est parallèle à T.

Appelons D cette autre tangente.
D est parallèle à T si et seulement si D et T ont le même coefficient directeur.
Puisque c'est une tangente, celui de D est égal à $f'(\alpha)$ (α qui reste à déterminer).
Celui de T étant égal à 9, on cherche α vérifiant $f'(\alpha) = 9$.

$$f'(\alpha) = 9 \iff 3\alpha^2 - 12\alpha + 9 = 9 \iff 3\alpha^2 - 12\alpha = 0 \iff 3\alpha(\alpha - 4) = 0 \iff (\alpha = 0 \ \ ou \ \ \alpha = 4).$$

Le deuxième point admet donc pour abscisse $x = 4$ et pour ordonnée $y = f(4) = 5$ (calcul effectué à la calculatrice).

A l'aide de l'outil tangente de la calculatrice !


NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
X=4
y=9.000001X+⁻31.000004