BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2021

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

Ce sujet est à rendre avec votre copie

Nom - Prénom : ....

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

La qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 1 **5 points**

Les parties A *et* B *peuvent être abordées de façon indépendante.*

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à $0,9$; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n, associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $\mathrm{T}_0 = 0,9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n, on a : $\mathrm{T}_{n+1} = \mathrm{T}_n - 0,1\mathrm{T}_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de $0,4$. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?
2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.

   Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n, $\mathrm{T}_{n+1} = f(\mathrm{T}_n)$.

   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

   b. Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leqslant \mathrm{T}_{n+1} \leqslant \mathrm{T}_n \leqslant 1$.

   c. La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

   d. Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à $0,4$ au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.

   Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $\mathrm{P}(t) = \dfrac{1\,000}{0,4 + 3,6\mathrm{e}^{-0,5t}}$ où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0\ ;\ +\infty[$ telle que $P(t_0) = 2\,000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.
4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

EXERCICE 2 **5 points**

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.
La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

   On envisage les événements suivants :

   - H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,
   - H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,
   - H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,
   - C : « l'arbre choisi est un conifère »,
   - F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

   a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

   b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

   c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à $0,525$.

   d. L'arbre choisi est un conifère.
   Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

   On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ?
   On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?
On arrondira à 10^{-3}.

Exercice 3 — 5 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{i}~;~\vec{j}~;~\vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2+t\\ y &=& 3-t\\ z &=& t\end{array}\right. , t \in \mathbb{R} \quad \text{e†} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -5+2t'\\ y &=& -1+t'\\ z &=& 5\end{array}\right. , t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.

1. Vérifier que le point A$(2~;~3~;~0)$ appartient à la droite d_1.
2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
   Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Vous justifierez votre réponse.
3. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, et passant par le point B $(3~;~3~;~5)$.
   a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.
   b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes ? Justifier la réponse.

Exercice 4 — 5 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, cocher la case de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Questions	Réponses
1. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq x^2$ pour tout x positif. On a alors :	☐ La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{e^x} = 0$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
2. Soient f et g deux fonctions telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0^+$. On a alors :	☐ La courbe représentative de la fonction $\dfrac{f}{g}$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ☐ La limite de la quantité $\dfrac{f}{g}$ en $+\infty$ est indéterminée ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0^+$
3. Soit la fonction f définie par : $f(x) = 3e^x - x$.	☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ☐ La limite de la fonction f en $+\infty$ est indéterminée
4. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $$u_n = \frac{3n}{n+2}.$$ On a :	☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ☐ La limite est indéterminée
5. Soit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{N}$ telles que : • $u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; • $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ On peut alors affirmer que :	☐ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ☐ $v_n \leq 2$, pour tout n ☐ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge ☐ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée