Terminale Spé	Évaluation de mathématiques n°4 Durée 2h	9 février 2022

Exercice 1 (8 points)

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

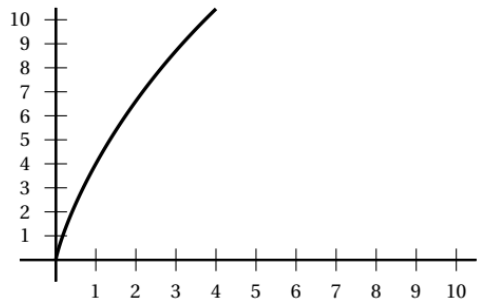
$$g(x) = 4x - x\ln x$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

• il semble que la fonction g soit positive ;
• il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. (a) On rappelle que

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0.$$

En déduire que

$$\lim_{x\to 0} \quad x\ln x = 0.$$

(b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

2. (a) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln x$.
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Exercice 2 (12 points)

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
2. (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$ où

$x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}215$ et $g(x_0) \approx 0{,}088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g	0 $\nearrow$	$g(x_0)$	$\searrow$ $-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.
   On la note α.

2. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.
   (b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

$x \leftarrow 0{,}22$
Tant que ... ... faire
    $x \leftarrow x + 0{,}01$
Fin de Tant que

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).