Terminale Spé	Évaluation de mathématiques n°4 Durée 2h	7 février 2022

Exercice 1 *(8 points) Antilles Guyane Sept 2019*

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

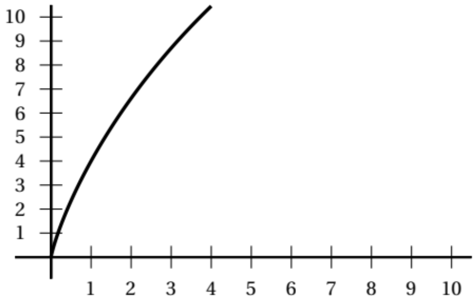
$$g(x) = 4x - x\ln x$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g' sa dérivée.

Partie A

Le graphique ci-contre représente une partie de la courbe représentative de la fonction g obtenue par un élève sur sa calculatrice. Cet élève émet les deux conjectures suivantes :

- il semble que la fonction g soit positive ;
- il semble que la fonction g soit strictement croissante.



L'objectif de cette partie est de valider ou d'invalider chacune de ces conjectures.

1. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow\ 4x - xlnx = 0 \Leftrightarrow x(4 - lnx) = 0 \Leftrightarrow 4 - lnx = 0$
$\Leftrightarrow 4 = lnx \Leftrightarrow x = e^4$

2. Déterminer le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$g(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - x\ln x > 0 \Leftrightarrow x(4 - \ln x) > 0 \Leftrightarrow 4 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 4 > \ln x \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^4$.
Donc $g(x) > 0$ sur $]0\,;\ \mathrm{e}^4[$ et $g(x) < 0$ sur $]\ \mathrm{e}^4\,;+\infty[$.

3. Les conjectures de l'élève sont-elles vérifiées ?

$g(x) < 0$ sur $]\ \mathrm{e}^4;+\infty[$ donc la première conjecture est fausse.
$g(1) = 4 > 0$ et $g(\mathrm{e}^4) = 0$, donc $g(1) > g(\mathrm{e}^4)$ alors que $1 < \mathrm{e}^4$; donc la deuxième conjecture est fausse.

Partie B

Dans cette partie, on poursuit l'étude de la fonction g.

1. (a) On rappelle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$. En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

Pour calculer $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$, on pose $t = \frac{1}{x}$; donc $x\ln x = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\ln(t)}{t}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} t = +\infty$; or $\lim\limits_{(t\to+\infty)} \left(-\frac{\ln t}{t}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$.

(b) Calculer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

$\lim\limits_{x\to 0} 4x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$

2. (a) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 3 - \ln x$.

Pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = 4 \times 1 + 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x} = 4 + \ln x - 1 = 3 - \ln x$.

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Pour tout réel $x > 0$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 3 > \ln x \Leftrightarrow x < \mathrm{e}^3$.

* On a vu que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

* $g(\mathrm{e}^{3}) = 4\,\mathrm{e}^{3} - \mathrm{e}^{3}\ln(\mathrm{e}^{3}) = 4\,\mathrm{e}^{3} - \mathrm{e}^{3} \times 3 = \mathrm{e}^{3}$
* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} 4 - \ln x = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} x(4 - \ln x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $]0;\ +\infty[$:

x	0		e^{3}		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\Vert\ 0$	$\nearrow$	e^{3}	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 2 (12 points) Nouvelle Calédonie Nov 2019

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

Pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \ln\left(\frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) = \frac{3}{1} = 3$ et finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ln 3$.

Ce résultat montre que géométriquement la droite d'équation $y = \ln 3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

2. (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul, $f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$.

f est la composée de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \frac{u'}{u}$.

Avec $u(x) = \frac{3x+1}{x+1}$, on a $u'(x) = \frac{3(x+1)-1\times(3x+1)}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$.

Donc $f'(x) = \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}} = \frac{2}{(3x+1)(x+1)}$.

(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

$f'(x)$ quotient de nombres supérieurs à zéro est supérieure à zéro, donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty]$ de $f(0) = \ln\frac{1}{1} = 0$ à $\ln 3$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\frac{9+1}{3+1}\right) = \ln\frac{10}{4} = \ln\frac{5}{2} \approx 0{,}92$.

On a bien $\frac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Par croissance (démontrée en **A. 2.**) de la fonction f, on a : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right) \approx 0{,}51 > 0{,}5$.

On a donc l'encadrement $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, il est vrai au rang $n+1$.
D'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Le résultat précédent montre que le suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$: elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, donc positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.
L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.
On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0; +\infty[$ où

$x_0 = \frac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}215$ et $g(x_0) \approx 0{,}088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g		$g(x_0)$	
	0		$-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive.
   On la note α.

Le tableau de variations montre que :

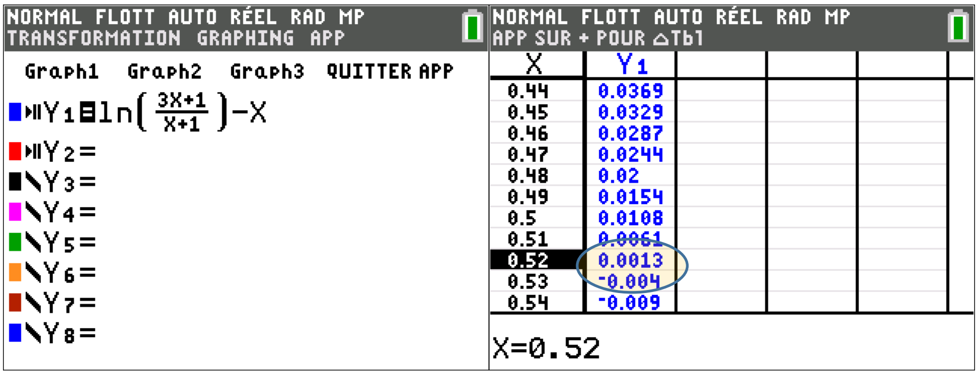
- Sur l'intervalle $[0\,; x_0]$, $g(x) \geq 0$ et s'annule en 0 qui n'est pas strictement positif.
- sur l'intervalle $[x_0; +\infty[$, la fonction g décroit de $g(x_0) \approx 0{,}088 > 0$ à $-\infty$.
  Elle est continue sur cet intervalle car dérivable, donc d'après le principe des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [x_0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
  Comme $x_0 > 0$, $\alpha > 0$.

2. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

$x \leftarrow 0{,}22$
Tant que $\ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right) - x > 0$ faire
  $x \leftarrow x + 0{,}01$
Fin de Tant que

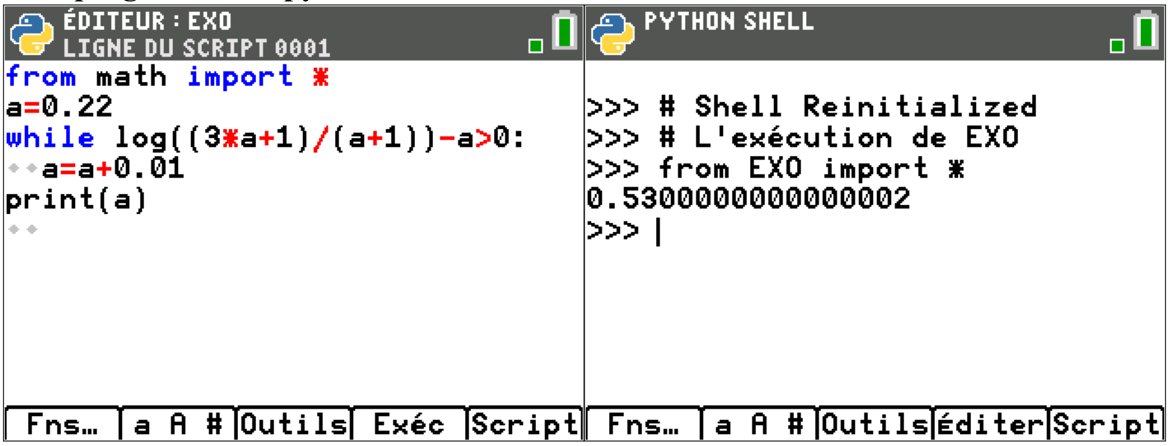
(b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

A l'aide du tableau de valeurs de la calculatrice :



Cependant la bonne réponse est 0,53 car le dernier test de $g(x) > 0$ étant réalisé (c'est-à-dire lorsque $x = 0{,}52$) on ajoute 0,01 à X.

A l'aide d'un programme en python :



3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).

Comme $f(\ell) = \ell$, ℓ est solution de l'équation $f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff g(x) = 0$.
Donc $\ell \approx 0{,}53$.