Première Spé S3	Évaluation de mathématiques n°6 Exponentielle (45 mn)	Jeudi 10 mars 2022

NOM :…………………	Prénom :………………………

Exercice 1

8 points

Simplifier les expressions suivantes

$$a)\ e^3 \times e^{-5} \times e^2$$

$$e^3 \times e^{-5} \times e^2 = e^{3-5+2} = e^0 = 1$$

$$b)\ \frac{e^{-4} \times e^3}{e}$$

$$\frac{e^{-4} \times e^3}{e} = \frac{e^{-4+3}}{e} = \frac{e^{-1}}{e^1} = e^{-1-1} = e^{-2}$$

$$c)\ e \times (e^x)^{-4}$$

$$e \times (e^x)^{-4} = e^1 \times e^{-4x} = e^{-4x+1}$$

$$d)\ \frac{(e^{3x} \times e^2)}{e^x}$$

$$\frac{(e^{3x} \times e^2)}{e^x} = \frac{e^{3x+2}}{e^x} = e^{3x+2-x} = e^{2x+2}$$

Exercice 2

3 points

Développer les expressions suivantes

$$a)\ e^x(e^{-x} + e^x)$$

$$e^x(e^{-x} + e^x) = e^x \times e^{-x} + e^x \times e^x = e^{x-x} + e^{2x} = e^0 + e^{2x} = 1 + e^{2x}$$

$$b)\ (e - e^x)(e + e^x)$$

$$(e - e^x)(e + e^x) = e^2 - (e^x)^2 = e^2 - e^{2x}$$

Exercice 3

3 points

Factoriser les expressions suivantes

$$a)\ e^{3x} - e^{x}$$

$$e^{3x} - e^{x} = e^{x}(e^{2x} - 1)$$

$$b)\ e^{2x} - e^{x} + 2e^{3x}$$

$$e^{2x} - e^{x} + 2e^{3x} = e^{x}(e^{x} - 1 + 2e^{2x})$$

Exercice 4

3 points

Résoudre les équations suivantes.

$$a)\quad e^{x+2} = 1$$

$$e^{x+2} = 1 \iff e^{x+2} = e^{0} \iff x + 2 = 0 \iff \boxed{x = -2}$$

$$b)\quad 2e^{-3x+2} - 2e = 0$$

$$2e^{-3x+2} - 2e = 0 \iff 2e^{-3x+2} = 2e^{1} \iff e^{-3x+2} = e^{1} \iff -3x + 2 = 1 \iff -3x = -1 \iff \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

Exercice 5

3 points

Résoudre les inéquations suivantes.

$$b)\quad e^{x} > 1$$

$$e^{x} > 1 \iff e^{x} > e^{0} \iff \boxed{x > 0}$$

$$b)\quad -2e^{x^2+3} \geq -2e^{-x}$$

$$-2e^{x^2+3} \geq -2e^{-x} \iff e^{x^2+3} \leq e^{-x} \text{ car } -2 < 0$$

$$e^{x^2+3} \leq e^{-x} \iff x^2 + 3 \leq -x \iff x^2 + x + 3 \leq 0$$

L'inéquation $x^2 + x + 3 \leq 0$ est du second degré avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$ donc

$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.

$\Delta < 0$ donc $x^2 + x + 3$ est toujours du signe de a c'est-à-dire strictement positif.

On a donc jamais $x^2 + x + 3 \leq 0$ ce qui prouve que **l'inéquation admet aucune solution**.

Question BONUS (3 points) Niveau Terminale Spé Maths

Etudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{x^2-3x-1}}{x+1}$$

f est définie si et seulement si $x + 1 \neq 0 \iff x \neq -1$.

Ainsi $D_f =]-\infty\,; -1[\cup]-1\,; +\infty[$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = e^{x^2-3x-1}$ et $v(x) = x + 1$ donc $u'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x-1}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-3)e^{x^2-3x-1} \times (x+1) - e^{x^2-3x-1} \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\big((2x-3)(x+1)-1\big)e^{x^2-3x-1}}{(x+1)^2} \\ & \quad \frac{(2x^2-x-4)e^{x^2-3x-1}}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

On sait que $e^{x^2-3x-1} > 0$ et $(x+1)^2$ donc f' a le même signe que $2x^2 - x - 4$.

$2x^2 - x - 4$ est un polynôme du second degré : $a = 2$, $b = -1$ et $c = -4$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 33 > 0$$

Le polynôme admet donc 2 racines qui sont : $x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{33}}{2\times 2} = \frac{1-\sqrt{33}}{4}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{33}}{4}$.

On peut maintenant dresser le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{33}}{4}$		-1		$\frac{1+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
$2x^2-x-4$		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Et ensuite le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{33}}{4}$		-1		$\frac{1+\sqrt{33}}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	≈ -283	$\searrow$	||	$\searrow$	$\approx 0{,}015$	$\nearrow$	