Évaluation n°1 - 30 août 2022 (1h00)

Exercice 1 (3 points)

Niveau 1

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $u_7 = 12$ et $u_{14} = 26\,244$
   Déterminer la valeur de q.

On a $u_{14} = u_7 \times q^{14-7} \Leftrightarrow 26\,244 = 12 \times q^7 \Leftrightarrow q^7 = \frac{26\,244}{12} = 2187 \Leftrightarrow q = 3$

2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_{14} = 3$ et $u_{29} = 168$.
   Déterminer la valeur de r.

On a $u_{29} = u_{14} + (29-14) \times r \Leftrightarrow 168 = 3 + 15r \Leftrightarrow 15r = 165 \Leftrightarrow r = \frac{165}{15} = 11$

Exercice 2 (3 points)

Niveau 1

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)^2 - 3) - (2n^2 - 3) = 2(n^2 + 2n + 1) - 3 - 2n^2 + 3 = 4n + 2$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4n + 2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui prouve que la suite est strictement croissante.

Exercice 3 (3 points)

Niveau 1-2

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{7}{4}$$

2. La suite est-elle arithmétique, géométrique ? Justifier.
   - La suite **n'est pas arithmétique** car $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. En effet :
   $$u_1 - u_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad et \quad u_2 - u_1 = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$
   - La suite **n'est pas géométrique** car $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. En effet :
   $$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \quad et \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

Exercice 4 (6 points)

Niveau 1-2

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$.

1. Calculer les 4 premiers termes de la suite (u_n) c'est-à-dire u_1 , u_2 , u_3 et u_4.

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$
$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{3}{8} + 1 = \frac{11}{8}$$
$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 1 = \frac{11}{16} + 1 = \frac{27}{16}$$
$$u_4 = \frac{1}{2}u_3 + 1 = \frac{27}{32} + 1 = \frac{59}{32}$$

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n que (u_n) est strictement croissante.

Soit P_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ »

Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{3}{4}$ donc $u_0 \leq u_1$ et la propriété P_0 est vraie.

Hérédité

On suppose que pour n fixé , P_n est vraie c'est-à-dire que $u_n \leq u_{n+1}$.
Peut on prouver dans ce cas que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$?

On a :

$$u_n \leq u_{n+1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}u_{n+1} \quad car\, \frac{1}{2} > 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 1 \leq \frac{1}{2}u_{n+1} + 1$$
$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$

On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

3. Quelle conjecture pouvez-vous faire comportant le comportement de la suite u pour des grandes valeurs de n.

D'après la calculatrice, il semblerait que les termes de la suite se rapproche de 2.

Exercice 5 (5 points)

Niveau 3

On pose :

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}(2i+1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)$$

Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$S_n = (n+1)^2$$

Soit P_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$ »

- Initialisation :

Pour $n = 0$: $S_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$ donc la propriété P_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose que pour n fixé , on a , $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$

Peut on prouver que , $1+3+5+\cdots+(2n+3) = (n+2)^2$?

On a

$$1+3+5+\cdots+(2n+3) = 1+3+5+\cdots+(2n+1) + (2n+3) = (n+1)^2 + (2n+3)$$

$$\text{Or } (n+1)^2 + (2n+3) = n^2+2n+1+2n+3 = n^2+4n+4 = (n+2)^2.$$

On a montré que la propriété est héréditaire : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

- Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, , $1+3+5+\cdots+(2n+1) = (n+1)^2$

Exercice 7 (1 point bonus)

Niveau 4

Montrer que 0,1212121212… est un nombre rationnel.

1. Méthode intuitive !

$$a = 0{,}121212\,\dots$$
$$100a = 12{,}1212\,\dots$$
$$100a - a = 12{,}1212\,\dots - 0{,}121212\,\dots$$
$$99a = 12$$
$$a = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$$

2. Méthode rigoureuse !

$$v_n = 0{,}1212\dots12 \quad \text{où } 12 \text{ est répété } n \text{ fois.}$$
$$= \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots + \frac{12}{10^{2n}}$$
$$= 12\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}}\right)$$
$$= 12(10^{-2} + 10^{-4} + \cdots + 10^{-2n})$$

$S = 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots + 10^{-2n}$ est la somme des termes consécutifs de la suite géométrique de premier terme 10^{-2} et de raison 10^{-2} donc $S = 10^{-2} \times \frac{1-(10^{-2})^n}{1-10^{-2}} = 10^{-2} \times \frac{1-(10^{-2})^n}{0{,}99} = \frac{1-(10^{-2})^n}{99}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-(10^{-2})^n) = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

On a démontré que la limite de la suite v est un nombre rationnel : $\frac{4}{33}$