Succession d'épreuves indépendantes et loi binomiale

I. Succession d'épreuves indépendantes

Définition - Univers associé à une succession d'épreuves indépendantes

Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement $\Omega_1 , \Omega_2, \dots , \Omega_n$

L'univers associé à cette succession de n épreuves est le ………………………………………

Remarque

Si les n épreuves indépendantes sont identiques et que l'on note Ω 1'univers associé à chacune d'elle, l'univers associé à cette succession est noté … … … ..

Exemples

On lance successivement et dans cet ordre trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et on note les trois résultats obtenus.

- Le résultat de chaque lancer n'a pas d'influence sur les autres donc les trois épreuves sont ……………………………….
- L'univers associé à cette succession de trois épreuves indépendantes est : ….
- (2 ; 5 ; 7), par exemple, est une issue associée à cette succession de trois épreuves indépendantes, elle correspond à l'obtention d'un …..au premier dé, d'un…..au deuxième et d'un …..au troisième.
- En revanche, (5 ; 2 ; 7) n'est pas une issue associée à cette succession de trois épreuves indépendantes.

Remarque

Dans le cas où les épreuves sont indépendantes, la notion de « succession » est parfois artificielle.
Par exemple, si l'on lance ***simultanément*** trois dés équilibrés numérotés respectivement de 1 à 4, de 1 à 6 et de 1 à 8 et que l'on considère le triplet des résultats obtenus dans cet ordre, la modélisation est identique à celle de l'exemple précédent.

Propriété - Probabilité d'une issue associée à une succession d'épreuves indépendantes

Soit une succession de n épreuves indépendantes.

La probabilité d'obtenir une issue $(x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)$ est :

$$p\big((x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n)\big) = \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

Remarque

En toute rigueur, on ne devrait pas écrire toutes les probabilités avec le même p car elles ne sont pas associées à la même expérience aléatoire.

Exemple

Dans l'exemple précédent, la probabilité de (2 ; 5 ; 7) est :

$$p\big((2\,;\ 5\,;\ 7)\big) = \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots ....$$

Remarque

Dans le cas où les épreuves ne sont pas indépendantes, on les représente à l'aide d'un ……………………..

Exemple

On tire au sort successivement deux boules sans remise dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules vertes.
On représente cette situation par un arbre à l'aide duquel on peut calculer des probabilités en appliquant les règles vues en Première.

Par exemple la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge est … … … … … … … … … … … … … … …

Remarque

On peut également représenter une succession d'épreuves indépendantes à l'aide d'un arbre pondéré mais dès qu'il y a plus de trois ou quatre épreuves cela devient généralement assez compliqué.

II. Épreuve, loi et schéma de Bernoulli

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à …………………….. que l'on peut nommer ……………………….. ou ………………………….

Exemples :

1) Le jeu du pile ou face : On considère par exemple comme succès "………………………" et comme échec "…………………………..".
2) On lance un dé et on considère par exemple comme succès "……………………………" et comme échec "……………………………………….".

Définition - Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0\,;1[$. La loi de la variable aléatoire X donnée ci-contre est appelée loi de Bernoulli de paramètre p, ce qui se note $\mathcal{B}(p)$.

x_i		
$p(X = x_i)$		

Propriété - Loi de Bernoulli : espérance, variance et écart-type

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$., on a :

- l'espérance : $E(X) =$ … ….
- la variance : $V(X) =$ … …
- l'écart-type : $\sigma(X) =$ … …

Démonstration

- $E(X) =$ ….
- $V(X) =$ ….
- $\sigma(X) =$ … ..

Exemple

Lorsque l'on appelle un service d'assistance téléphonique, la probabilité de parler à un conseiller est 0,1 (le reste du temps, la demande est traitée par un robot). On considère la variable aléatoire X donnant le nombre de conseiller (0 ou 1) auquel on parle lors d'un appel à ce service.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	0,9	0,1

- X suit la loi donnée dans le tableau, c'est-à-dire la loi de Bernoulli de paramètre ……………
- Son espérance est donc $E(X) =$ … … … … ..
- Son écart-type est $0{,}1 \times 0{,}9\ =$ … … … ….

Définition - Schéma de Bernoulli

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est appelée …………………… …………………………………

Exemple
On considère la répétition de cinq appels au service d'assistance téléphonique de l'exemple précédent.

- On considère que les appels sont indépendants et que le fait de parler à un conseiller est un succès (S).
- Cette succession de cinq épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes est un schéma de Bernoulli.
- La probabilité de l'issue (E ; S ; E ; E ; E), c'est-à-dire de ne parler à un conseiller qu'au deuxième appel, est … ..

Remarque
Généralement, on représente un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré et on y calcule des probabilités à l'aide de la formule des probabilités totales.

➢ **Exercices 49 à 51 p. 384**

III. Loi binomiale

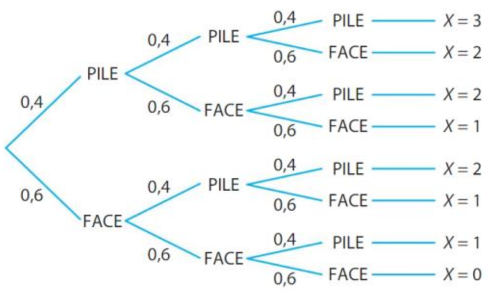
1. Définition et calculs de probabilités

Définition - Loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0\,;1[$. On considère le schéma de Bernoulli pour lequel n est le nombre de répétitions et p la probabilité d'un succès.
La loi de la variable aléatoire donnant le nombre de succès sur les n répétitions est appelée …………
………………………………………………………………………………………………………..

Exemple
On lance trois fois successivement une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité de tomber sur PILE est 0,4 et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre de PILE obtenus.

- En considérant que « tomber sur PILE » est un succès, X donne le nombre de succès lorsque l'on répète $n = 3$ fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli dont la probabilité d'un succès est $p =$ … … ….., donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n =$ … …. et $p = \cdots$ ….., notée plus simplement … … … … … … ….
- On peut déterminer les probabilités associées à X à l'aide d'un arbre pondéré.



La probabilité d'obtenir 2 PILE est

$$P(X = 2) = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}4 + 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}288$$

Propriété - Probabilités et loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$
Pour tout entier k dans $[0\,;\,n]$, on a $p(X = k) =$ … … … … … … … … … … … … … … ..

<u>Démonstration</u>
……

Exemple
Dans l'exemple précédent, on retrouve $p(X = 2) =$ …

Remarque
Pour calculer des probabilités avec la loi binomiale, on peut utiliser la formule précédente ou utiliser les fonctions avancées de la calculatrice.

2. Espérance, variance et écart-type.

Propriété - Loi binomiale : espérance, variance et écart-type

Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$ on a :

- L'espérance $E(X) =$ … … … … ..
- La variance $V(X) =$ … … … … …

Démonstrations
Exercice 138 p. 397 : démonstration calculatoire.
Chapitre 13 p. 416 avec une somme de variables aléatoires.

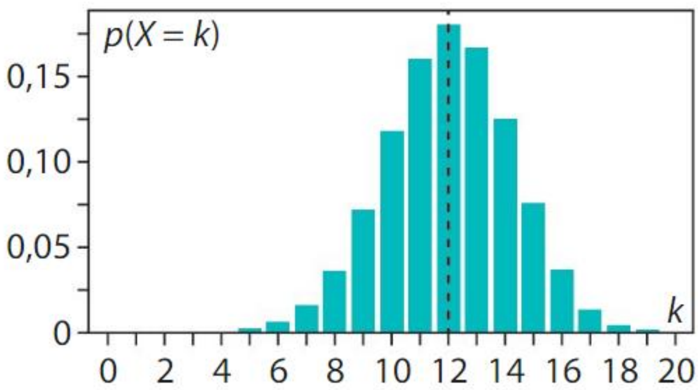
Exemple
La variable aléatoire X suivant la loi $\mathcal{B}(20\,;\ 0{,}6)$ a pour espérance $E(X) =$ … … … … … …., pour variance $V(X) =$ … … … … … … … … … … … et pour écart-type $\sigma(X) =$ … … … … … … … … … … … …

Remarque
Plus l'écart-type de X est petit plus les valeurs proches de son espérance sont probables.

Propriété - Forme du diagramme en barres associé

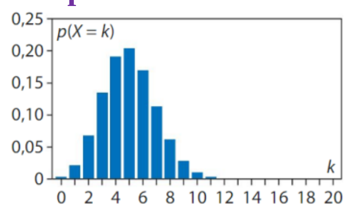
Pour X, variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n\,;p)$, le diagramme en barres associé à X est en forme de …………………., approximativement centré sur son …………………………………..

Exemple
Le diagramme en barres associé à la loi $\mathcal{B}(20\,;\ 0{,}6)$, sur lequel k varie de 0 à 20 en abscisses, montre, pour chaque valeur de k, la hauteur de la barre correspondant à $p(X = k)$.
Par exemple, pour $k = 10$, la hauteur de la barre est 0,12.
Le diagramme est en forme de cloche et approximativement centré sur 12 : l'espérance correspondant à cette loi.
Ce diagramme est quasiment symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 12$ tracée en pointillés.

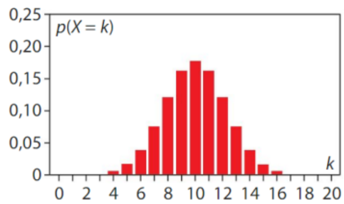


Remarque
Pour des variables aléatoires suivant des lois binomiales de même paramètre n, plus p est éloigné de plus l'écart-type est petit et, en conséquence, plus la cloche est « étroite et haute » (attention aux échelles sur les axes quand on compare).

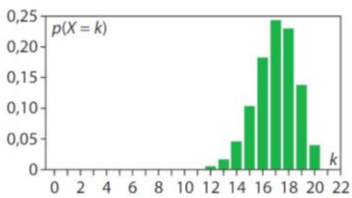
Exemples



$n = 20$ et $p = 0{,}25$; $E(X) = 5$ et $\sigma(X) \approx 1{,}94$.



$n = 20$ et $p = 0{,}5$; $E(X) = 10$ et $\sigma(X) \approx 2{,}24$.



$n = 20$ et $p = 0{,}85$; $E(X) = 17$ et $\sigma(X) \approx 1{,}6$.