Le barème est à titre indicatif

Exercice 1 (6 points)

Soit l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = f(z) = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$$

1) On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).
   Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

2) On pose $z_1 = 1 + 2i$.
   Montrer que, pour tout nombre complexe z :
$$\frac{z' - z}{z_1} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}$$
3) En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_1}$ est réel.

Exercice 2 : Restitution organisée de connaissances (6 points)

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - iy$ et que pour tous nombres complexes z_1 et z_2,

$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

Démontrer que :

(1) $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}} \quad pour\ z_2 \neq 0$

(2) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad pour\ z_2 \neq 0$

Exercice 3 : Second degré (8 points)

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (4 - 4i)z - 8i.$$

1) Démontrer que $2i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
2) Démontrer que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 4)$.
3) En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 4 : The Bonus !

Calculer selon les valeurs de n, la valeur de :

a) la somme $1 + i + i^2 + \ldots + i^n$.

b) le produit $1 \times i \times i^2 \times \ldots \times i^n$.