Le barème est à titre indicatif

Exercice 1 (6 points)

Soit l'application f qui admet pour écriture complexe :

$$z' = f(z) = \frac{(3+4i)z + 5\bar{z}}{6}$$

1) On pose $z = x + iy$ (avec x et y réels).
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6} = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} \\ \Leftrightarrow \quad z' &= \frac{3x+3iy+4ix-4y+5x-5iy}{6} \\ \Leftrightarrow \quad z' &= \frac{(8x-4y)+(4x-2y)i}{6} \\ \Leftrightarrow \quad z' &= \frac{(4x-2y)}{3} + \frac{(2x-y)}{3}i \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{R}e(z') = \frac{(4x-2y)}{3}$ et $\mathfrak{I}m(z') = \frac{(2x-y)}{3}$

2) On pose $z_1 = 1 + 2i$.
Montrer que, pour tout nombre complexe z :

$$\frac{z'-z}{z_1} = \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}$$

Repartons de $z' = \dfrac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$:

$$\frac{z'-z}{1+2i} = \frac{\left(\frac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6} - \frac{6z}{6}\right)(1-2i)}{5} = \frac{((-3+4i)z+5\bar{z})(1-2i)}{30} = \frac{(-3z+4iz+5\bar{z})(1-2i)}{30}$$

$$= \frac{-3z+4iz+5\bar{z}+6iz+8z-10i\bar{z}}{30} = \frac{5z+10iz+5\bar{z}-10i\bar{z}}{30} = 5\frac{z+\bar{z}}{30} + 10i\frac{z-\bar{z}}{30}$$

$$= \frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}.$$

3) En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_1}$ est réel.

C'est un réel car $z + \bar{z} = 2x$ et $z - \bar{z} = 2iy$ donc

$$\frac{z+\bar{z}}{6} + i\frac{z-\bar{z}}{3}. = \frac{2x}{6} + i\frac{2iy}{3} = \frac{2x-4y}{6} = \frac{x-2y}{3} \in \mathbb{R}$$

On pouvait remplacer z par $x + iy$:

$$\frac{z'-z}{z_A} = \frac{\frac{1}{3}(4x-2y-3x) + i\frac{1}{3}(2x-y-3y)}{1+2i} = \frac{1}{3}\frac{(x-2y)+i(2x-4y)}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{1}{15}[(x-2y+4x-8y)+i(2x-4y-2x+4y)] = \frac{5x-10y}{15} = \frac{x-2y}{3}.$$

Ce qui donnait le résultat directement.

Exercice 2 : Restitution organisée de connaissances (6 points)

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - iy$ et que pour tous nombres complexes z_1 et z_2,

$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$

Démontrer que :

$$(1)\quad \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}} \quad pour\ z_2 \neq 0$$

$$1 = \frac{z_2}{z_2} \quad donc \quad \overline{1} = \overline{\left(\frac{z_2}{z_2}\right)} \quad or \quad \overline{1} = 1 \ \ et \ \ \overline{\left(\frac{z_2}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_2 \times \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_2} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}$$

$$donc \quad \overline{z_2} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = 1 \quad et \quad \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}}$$

$$(2)\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad pour\ z_2 \neq 0$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \times \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \times \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Exercice 3 : Second degré (8 points)

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (4 - 4i)z - 8i.$$

1) Démontrer que $2i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

$$\begin{aligned} P(2i) &= (2i)^3 + (2 - 2i)(2i)^2 + (4 - 4i)(2i) - 8i \\ &= -8i + (2 - 2i)(-4) + 8i - 8i^2 - 8i \\ &= -8i - 8 + 8i + 8i + 8 - 8i \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P(2i) = 0$ donc $2i$ est bien solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) Démontrer que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 4)$.

3) En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 4 : The Bonus !

Calculer selon les valeurs de n, la valeur de :

a) la somme $1 + i + i^2 + \dots + i^n$.

$$1 + i + i^2 + \dots + i^n = 1 \times \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i}$$

b) le produit $1 \times i \times i^2 \times \ldots \times i^n$.

$$1 \times i \times i^2 \times \ldots \times i^n = i^{1+2+3+\cdots+n} = i^{\frac{n(n+1)}{2}}$$