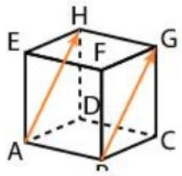
Vecteurs, droites et plans de l’espace

I. Les vecteurs de l'espace

Définition - Vecteurs

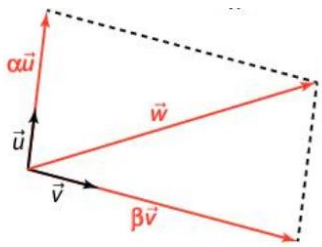
Soient A et B deux points de l'espace, la transformation qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme s'appelle **……………………………**.
Comme, dans le plan, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MM'}$ sont égaux et on dit également qu’ils sont deux **………………………………….** d'un vecteur unique noté $\vec{u}$.

Exemple



Dans le cube $ABCDEFGH$, les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont égaux car … … … … … … … … …
………………………………………..

Propriété - Combinaison linéaire



Étant donné trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non ………………….
On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s’il existe
…………………………………………….
… … … … … … … … … … … … … ..

Remarques

① On dit aussi que les trois vecteurs sont ………………………
② Dans le cas où $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ on dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont …………………..

Définition - Droite de l'espace

Une droite de l'espace est définie :

- soit par ………………………………………..,
- soit par ……………………………………………

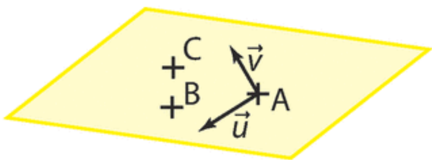
Propriété - Caractérisation d'une droite de l'espace

La droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l’espace tels que …………………………………………...

Définition - Plan de l'espace

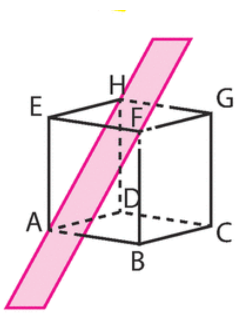
Un plan de l’espace est défini :

- soit par …………………………………………………..
- soit par …………………………………………………...



Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$, le plan (AFH) est déterminé par les trois points … … … ….
ou bien par le point … … et les vecteurs ………………………………………



Propriété - Caractérisation d'un plan de l'espace

Le plan défini par le point A et les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M tels que ………………………………………………
…………………………………………………………………………..

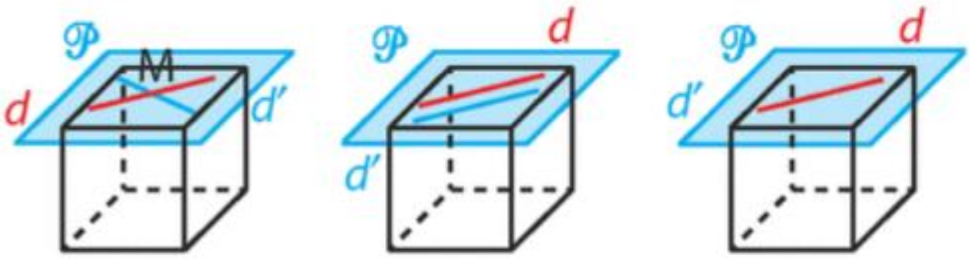
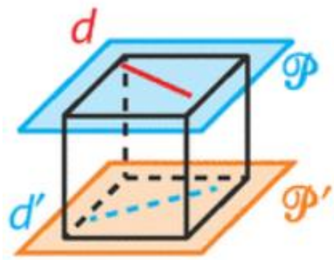
Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ et le plan (ABD), le point C appartient à ce plan car le vecteur $\overrightarrow{AC}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de …

II. Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

Propriété – Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace sont soit ……………(c'est-à-dire incluses dans ………………………) soit ……………………………….

d et d' sont ………………………………………………………………….. …………………………………………………………………………	d et d' sont ……… … … … … … … … ..
	

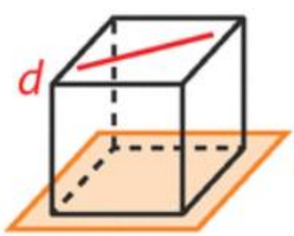
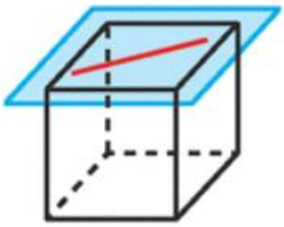
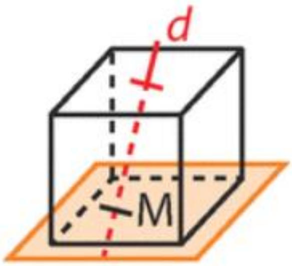
Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ les droites (AB) et (CE) …………………………………...

Propriété - Positions relatives d'une droite et d'un plan

Soit d une droite et $\mathcal{P}$ un plan.

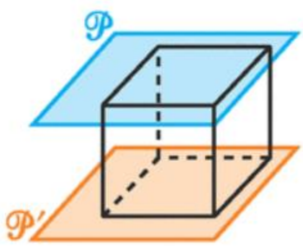
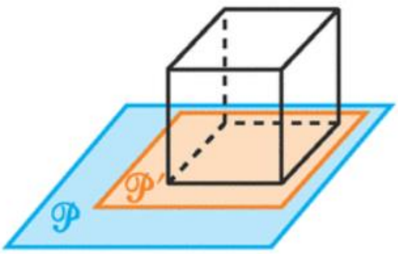
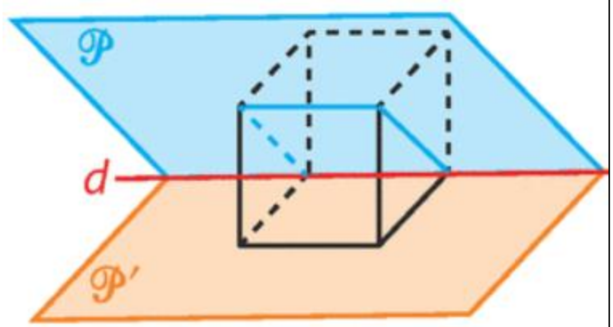
Il existe trois configurations pour les positions relatives de d et de $\mathcal{P}$.

① … … … … … … … … … … … … … …	② … … … … … … … … … ….	③ … … … … … … … … … …
		

Propriété - Positions relatives de deux plans

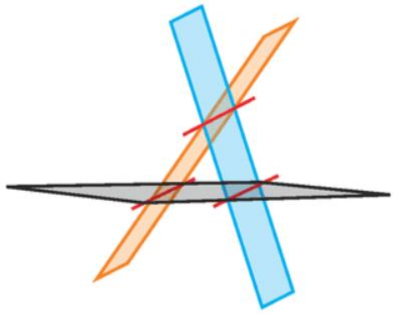
Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}$' deux plans.

Il existe trois configurations pour les positions relatives de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{P}'$.

① … … … … … … … … … …. ………………………..	② … … … … … … … … … … … …	③ … … … … … … … … … … … … … … ..
		

Théorème - Théorème du toit

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ contiennent respectivement deux droites d et d' parallèles entre elles alors ……………………………………
…………………………………………………………………..



Propriétés - Parallélisme de droites et de plans

① Une droite est strictement parallèle à un plan si et seulement si
……………………………………………………………………………………

② Deux plans sont parallèles si et seulement si ……………………………………………………
……………………………………………………………………………………...

③ Si une droite est parallèle à un plan alors tout plan contenant cette droite et sécant au plan, ……
……………………………………………………………………………………...

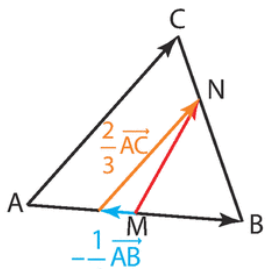
III. Décomposition de vecteurs dans l'espace

Propriété - Relation de Chasles

Comme dans le plan, si A, B et C sont trois points de l'espace alors on a :

… … … … … … … … … … … … … …

Exemple



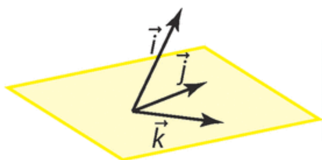
Dans un triangle ABC, on place les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{MN} =$ …
……………………………………………………………………………………..

Définition - Base

Trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ constituent une base de l'espace si et seulement si
……………………………………………………………………………………...



Exemple

Dans un cube $ABCDEFGH$, aucun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AG}$ n'est une combinaison linéaire des deux autres donc $\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AG}\right)$ est une base de l'espace.

Propriété - Décomposition d'un vecteur dans une base

Soit $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$ une base de l'espace, tout vecteur $\vec{u}$ peut décrire comme une combinaison linéaire unique des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ et on a :

$\vec{u} =$ … … … … … … … … … … ….

Et on dit que … dans la base $(\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\,)$.

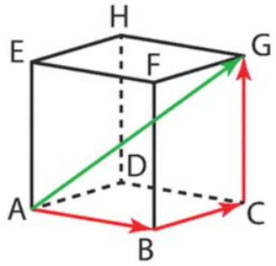
Démonstration

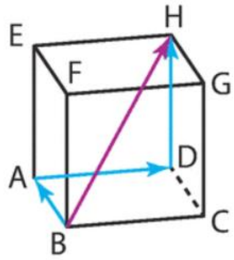
……

Exemple

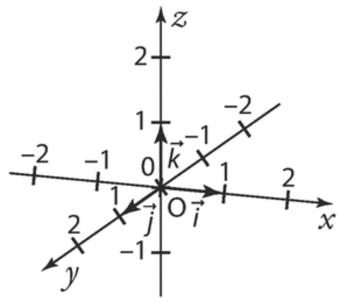
Dans le cube $ABCDEFGH$ muni de la base $\left(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD}\,,\overrightarrow{AE}\right)$, on peut décomposer les vecteurs ainsi :

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$





IV. Repérage dans l'espace



Propriété - Repère

On appelle repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace le quadruplet où O est un point de l'espace appelé origine et où le triplet $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une base de l'espace.

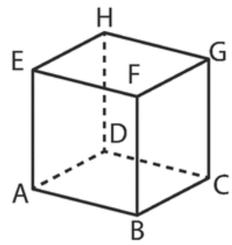
Exemple

Dans un cube $ABCDEFGH$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est une .... donc $(A$; ... ... $)$ est un ....

Corollaire - Coordonnées d'un point

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, pour tout point M de l'espace il existe un triplet $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ unique tel que $\overrightarrow{OM} =$ ... ... où x s'appelle ...., y .... et z la ....

Exemple



Dans le cube $ABCDEFGH$ muni du repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ les coordonnées des autres sommets du cube sont ... ... car par exemple : ... ...

Remarque

Les opérations sur les coordonnées dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

Propriété - Coordonnées d'un vecteur

Comme dans le plan si $A(x_A\ ;\ y_A\ ;z_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B\ ;z_B)$ alors ... ...

Exemple

Dans le cube $ABCDEFGH$ muni du repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a les coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{GH}$ ... ... et $\overrightarrow{FC}$ ... ...

Propriété - Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, la droite passant par le point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet comme représentation paramétrique le système ... ...

Démonstration

… … ..

Remarque

On peut trouver une autre représentation paramétrique de la même droite en changeant de point et/ou en prenant un autre vecteur directeur colinéaire au précédent.

Exemple

Une représentation paramétrique de la droite de l'espace passant par le point $A(-1\ ;\ 2\ ;\ -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}$ est … … … … … … … … … … … … … … … … … ..