

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2022/2023

BAC BLANC n°1

MATHÉMATIQUES

Spécialité Maths

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 2 HEURES

COEFFICIENT : 16

Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les deux exercices.

Chaque exercice choisi devra être rédigé sur une copie distincte.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (8 points)

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7 % des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20 % des cas ;
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1 % des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les évènements suivants :

- M : « la personne est malade »;
- T : « le test est positif ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif, est de 0,0653.
3. Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $P_M(T)$ ou $P_T(M)$?
4. On considère dans cette question que la personne choisie au hasard a eu un test positif.

Quelle est la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

5. On choisit des personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

(a) Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .

(b) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

6. Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elle ait un test positif, soit supérieur à 99 %.

Exercice 2 (12 points)

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25°C .

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1,3^\circ\text{C}$.

I – Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante c'est-à-dire que l'augmentation de la température est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante

$$\text{Pour tout entier naturel } n, \quad T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25).$$

1. Justifier que, pour tout entier n , on a $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.
2. Calculer T_1 et T_2 . On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $T_n \leq 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n) .
5. A l'aide de la calculatrice que peut-on conjecturer concernant la convergence de la suite (T_n) .
6. On pose pour tout entier naturel n , $U_n = T_n - 25$.
 - (a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0 .
 - (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = -44 \times 0,94^n + 25$.
 - (c) En déduire la limite de la suite (T_n) . Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. (a) Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur.
Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
 - (b) Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 . Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
 - (c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geq 10$.

```
def seuil() :  
    n=0  
    T= .....  
    while T..... :  
        T= .....  
        n=n+1  
    return n
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.