Limites de fonctions

I. Limite d'une fonction en l'infini

Dans toute cette partie, $\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère quelconque du plan.

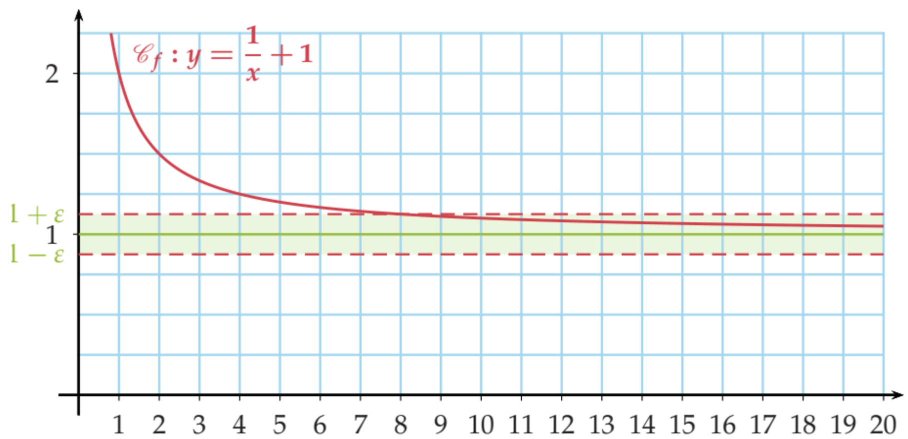
1. Limite finie en l'infini

Définition

Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a;+\infty[$.
La fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ si ....
....
On note alors : ... ...

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}+1$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=$ ... .
En effet, l'inverse de x se rapproche de 0 à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert I tel que $1\in I$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, aussi étroite que soit une bande parallèle à la droite d'équation $y=1$ et qui la contient, il existe toujours une valeur de x au delà de laquelle $\mathcal{C}_f$ ne sort plus de cette bande.



Définition : Asymptote horizontale

La droite d'équation ... ... est .... à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ si ... ...

Remarque : On définit de façon analogue ... ... qui caractérise une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ d'équation ... ...

Exemple

On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=$ ... .. On a aussi $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=$ ... ..
Donc, la droite d'équation ... ... est .... à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Limite infinie en l'infini

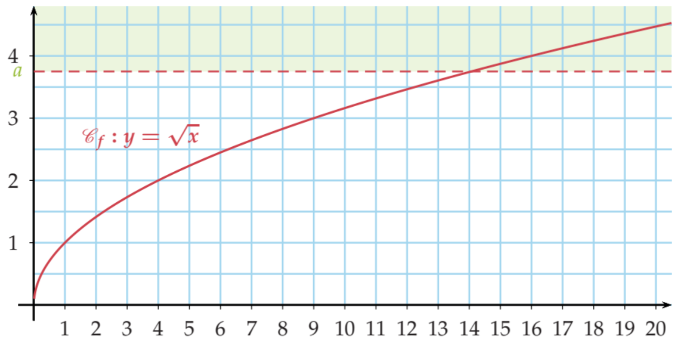
Définition

La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]a;+\infty[$ contient …………
…………………………………………………………
On note alors : … … … … … … … … … … ….

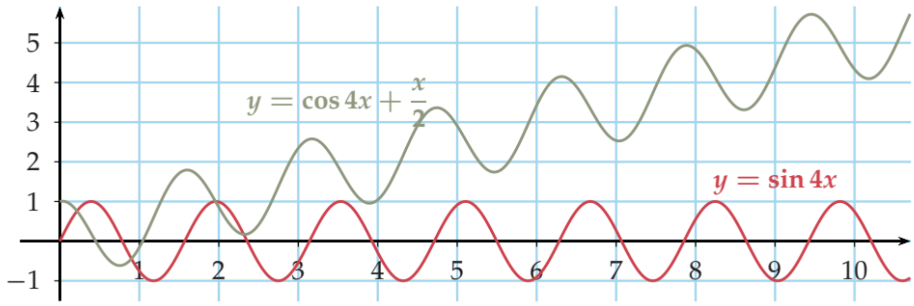
Exemple

Soit f la fonction racine carrée. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$ … … … …

En effet, $\sqrt{x}$ devient aussi grand que l'on veut à mesure que x augmente.
Soit un intervalle ouvert $I =]a;+\infty[$. Alors, $f(x)$ sera toujours dans I pour x assez grand.
Graphiquement, si on considère le demi-plan supérieur de frontière une droite d'équation $y = a$, il existe toujours une valeur de a au delà de laquelle $\mathcal{C}_f$ ne sort plus de ce demi-plan.



- On définit de façon analogue :……………………………………………………………………..
- Il existe des fonctions qui n'admettent pas de limite en l'infini. Par exemple, les fonctions ……….. et …………………. n'admettent de limite ni en $+\infty$, ni en $-\infty$.
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est ………………………………...



➢ <u>**Méthode 1 – Déterminer une limite en l'infini (page 53)**</u>

II. Limite d'une fonction en une valeur réelle

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ est un intervalle ou une réunion d'intervalles) et a un réel appartenant à $\mathcal{D}$ ou étant une borne de $\mathcal{D}$.

Définition - Limite infinie

On dit que $f(x)$ tend vers … ….quand x tend vers … …et on note … … … … … …. lorsque tout intervalle de la forme $]A\ ;\ +\infty[$; contient $f(x)$ pour x suffisamment proche de a dans $\mathcal{D}$. C'est-à-dire que pour tout réel A il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que si … … … … … … … …. alors … … … … … …

Remarque

On définit de la même manière que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a, quand tout intervalle de la forme $]-\infty\,;A[$ contient $f(x)$ pour x assez proche de a.

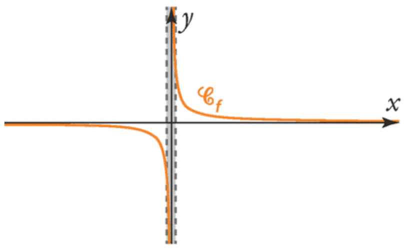
Définition - Limite finie ou infinie à gauche ou à droite

- On dit que f admet une limite à gauche de a et on note … … … … … … … .. lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec … … … … … … …
- On dit que f admet une limite à droite de a et on note … … … … … … … …. lorsque f admet une limite quand x tend vers a avec … … … … … … …

Remarques

① On écrit aussi … … … … … pour la limite à gauche et … … … … … … …. pour la limite à droite.
② Les limites à droite et à gauche peuvent être …………………………..
③ Dans le cas où f est définie en a et où les limites à droite et à gauche sont égales alors la limite (tout court) est … … … … … … et dans le cas où f n'est pas définie en a et où les limites à droite et gauche sont égales, la limite existe et est égale à la limite ………………………………

Exemple

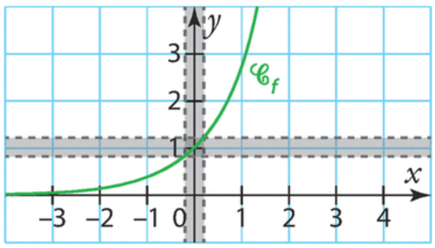


On étudie la fonction inverse quand x tend vers zéro.
Si $A = 100$ alors, ………………………………………………………
…………………………………………………………………………
On en déduit que pour x proche de zéro et positif, on a … … … … … … … … ..
De même si $A = -100$ alors, ……………………………………………
…………………………………………………………………………..
On en déduit que pour x proche de zéro et négatif, on a … … … … … … … … … … ..

Définition - Limite finie

Une fonction f admet une limite ℓ quand x tend vers un réel a lorsque $f(x)$ est
………………………………………………………………..
………………………………………………..

Exemple



Pour la fonction exponentielle on a $\lim\limits_{x\to 0} e^x =$ … ….

➢ **Méthode 2 – Conjecturer une limite en un réel (page 55)**

Définition - Asymptote verticale

Si la limite à gauche ou/et à droite de $f(x)$ quand x tend vers a est infinie alors on dit que ………………….
……………………………………………………………………………………………………

Exemple

La courbe représentative de la fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation ………………
C'est-à-dire que la courbe se ………………………de la droite pour x assez proche de …………………
comme on le voit sur la courbe de la fonction inverse.

➢ **Méthode 3 – Conjecturer la présence d'asymptotes (page 55)**

III. Limite des fonctions de référence

Propriétés – Limite des fonctions de référence

Fonction inverse				
Fonction puissance				
Fonction exponentielle				
Fonction racine carrée et racine carrée inverse				

IV. Opérations sur les limites

Propriété - Limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux fonctions

- Limite d'une somme :

f	g	$f+g$

- Limite d'un produit :

f	g	fg

- Limite d'un quotient :

f	g	f/g

- ∞ peut signifier $+\infty$ ou $-\infty$. Les règles du signe d'un produit ou d'un quotient demeurent.
- Pour la limite de la différence $f-g$, on considère la limite de la somme $f+(-g)$.
- Les quatre lignes grises des tableaux correspondent aux quatre cas d'indétermination :

……………………………………………………………………………………….

Plusieurs techniques seront vues pour lever une indétermination.

Exemple

Soit $f : x \mapsto (1-x)\left(x^3+\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

……

➢ **Méthode 4 – Déterminer des limites à l'aide des opérations sur les limites (page 59)**

V. Limite d'une fonction composée

1. Fonction composée

Une composée de deux fonctions correspond à un …………………… de deux fonctions l'une après l'autre.
Par exemple, composons la fonction $f: x \mapsto 1 - x$ suivie de $g: x \mapsto \sqrt{x}$. On peut ainsi schématiser :

$$\dots\dots \underset{\dots.}{\longmapsto} \dots\dots \underset{\dots.}{\longmapsto} \dots\dots$$

Cependant, on voit que la fonction g ne peut s'appliquer que si l'ensemble des images par la fonction f est inclus dans ……………………………………..
Ainsi, pour appliquer ici la racine carrée, il faut que … … … … … …. c'est-à -dire que … … … … … … …
La composée existe donc dans le schéma suivant où on précise les ensembles de départ et d'arrivée pour f :

$$\begin{array}{ccccc} \dots\dots\dots\dots\dots. & \rightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \rightarrow & \dots\dots.. \\ x & \underset{\dots}{\longmapsto} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots. & \underset{\dots}{\longmapsto} & \dots\dots\dots \end{array}$$

En composant f suivie de g, on a ainsi défini sur … … … … … . …. la fonction $x \mapsto$ … … … …..

Définition

Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.
La composée de f suivie de g est la fonction notée … … … … définie sur E par … … … … … … … … …

Remarque : Il ne faut pas confondre … … … .. et … … … …. qui sont, en général, différentes.

Exemple

En reprenant f et g de l'exemple précédent, définissons $f \circ g$.
La composée de g suivie de f est possible en partant de l'ensemble de définition de g :

$$\begin{array}{ccccc} \dots\dots\dots\dots\dots. & \rightarrow & \dots\dots\dots\dots\dots\dots.. & \rightarrow & \dots\dots.. \\ x & \underset{\dots}{\longmapsto} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots. & \underset{\dots}{\longmapsto} & \dots\dots\dots \end{array}$$

En composant g suivie de f, on a ainsi défini sur … … … … … …. la fonction $x \mapsto$ … … … …..

2. Théorème de composition des limites

Théorème

Soit h la composée de la fonction f suivie de g et α, β et γ trois réels ou $\pm\ \infty$.

$$\text{Si } \lim_{x\to\dots} f(x) = \dots\dots \text{ et } \lim_{x\to\dots} g(x) = \dots\dots \text{, alors } \lim_{x\to\dots} h(x) = \dots\dots.$$

Exemple

Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction $g \circ f$ de l'exemple précédent.
La composée de $f: x \mapsto 1 - x$ suivie de $g: x \mapsto \sqrt{x}$ est $h: x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty; 1]$.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) =$ … … .. (par somme) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} =$ … … .. (limite de référence).
Donc, d'après le théorème de composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} =$ … … ..

➢ <u>Méthode 6 – Utiliser les compositions de fontions (page 59)</u>

VI. Limites et comparaison

1. Théorème de comparaison

Théorème

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\,; +\infty[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) =$ … … ….
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ … … …

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]-\infty; \beta[$ de $\mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) =$ … … …
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ … … …

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle $]\alpha; \beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in]\alpha; \beta[$.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(x) =$ … … …
- $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) =$ … … …

Exemple

Déterminons la limite en $+\infty$ de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

2. Théorème d'encadrement dit « des gendarmes » ou « sandwich »

Théorème

Soit deux réels α et ℓ et trois fonctions f, g et h telles que, pour $x > \alpha$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors … … … … … … … ..

Remarques :

On a, comme pour le théorème de comparaison précédent, deux théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un réel x_0.

Exemple

Déterminons la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

➢ **Méthode 5 – Utiliser les théorèmes d'encadrement et de comparaison (page 59)**