**Vecteurs, droites et plans de l’espace**

1. **Les vecteurs de l'espace**

**Définition - Vecteurs**

Soient $A$ et $B$ deux points de l'espace, la transformation qui à tout point $M$ de l'espace associe l'unique point $M' $ tel que $ABM'M$ soit un parallélogramme s'appelle **……………………………**.

Comme, dans le plan, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{MM'}$ sont égaux et on dit également qu’ils sont deux **………………………………….** d'un vecteur unique noté $\vec{u}$.



**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$, les vecteurs $\vec{AH}$ et $\vec{BG}$ sont égaux car $………………………$

………………………………………..

**Propriété - Combinaison linéaire**

Étant donné trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace non ………………….

On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $ \vec{u}$ et $\vec{v}$ s’il existe ………………………………………….

$$…………………………………..$$

**Remarques**

➀ On dit aussi que les trois vecteurs sont ………………………

➁ Dans le cas où $\vec{v}=α\vec{u}$ on dit que les vecteurs $\vec{u} $ et  $\vec{v}$ sont …………………..

**Définition - Droite de l'espace**

Une droite de l'espace est définie :

• soit par ………………………………………..,

• soit par ………………………………………….

**Propriété - Caractérisation d'une droite de l'espace**

La droite passant par le point $A$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points $M$ de l’espace tels que ……………………………………………...

**Définition - Plan de l'espace**

Un plan de l’espace est défini :

• soit par …………………………………………………..

• soit par …………………………………………………...



**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$, le plan $(AFH)$ est déterminé par les trois points $………….$ ou bien par le point $…… $et les vecteurs ………………………………………

**Propriété - Caractérisation d'un plan de l'espace**

Le plan défini par le point $A$ et les vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et  $\vec{v} $est l'ensemble des points $M$ tels que ………………………………………………

………………………………………………………………………………..

**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$ et le plan $(ABD)$, le point $C$ appartient à ce plan car le vecteur $\vec{AC}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $………………………………………………………………………………………$

1. **Positions relatives de droites et de plans dans l’espace**

**Propriété – Positions relatives de deux droites**

Deux droites de l’espace sont soit …………….(c’est-à-dire incluses dans ………………………) soit ……………………………….

|  |  |
| --- | --- |
| $d$ et $d'$ sont …………………………………………………………………..………………………………………………………………………………. | $d$ *et* $d'$sont ……….$$…………………..$$ |

**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$ les droites $(AB)$ et $(CE)$ …………………………………...

**Propriété - Positions relatives d'une droite et d'un plan**

Soit $d $une droite et $P$ un plan.

II existe trois configurations pour les positions relatives de $d$ et de $P$.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ① $…………………………………$ | ② $……………………….$ | ③ $…………………………$ |

**Propriété - Positions relatives de deux plans**

Soit $P$ et $P$' deux plans.

Il existe trois configurations pour les positions relatives de $P $et de$ P'$.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ① $……………………….$………………………. | ② $………………………………$ | ③ $…………………………………..$ |

**Théorème - Théorème du toit**

Si deux plans $P$ et $P'$ contiennent respectivement deux droites $d$ et$ d'$ parallèles entre elles alors ……………………………………

……………………………………………………………………..

**Propriétés - Parallélisme de droites et de plans**

① Une droite est strictement parallèle à un plan si et seulement si ………………………………………………………………………………….

② Deux plans sont parallèles si et seulement si ………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………...

③ Si une droite est parallèle à un plan alors tout plan contenant cette droite et sécant au plan, ……

………………………………………………………………………………………………………...

1. **Décomposition de vecteurs dans l'espace**

**Propriété - Relation de Chasles**

Comme dans le plan, si A, B et C sont trois points de l’espace alors on a :

$$…………………………………$$



**Exemple**

Dans un triangle $ABC$, on place les points $M$ et $N $ tels que $\vec{AM}=\frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{BN}=\frac{2}{3}\vec{BC}$.

Exprimons le vecteur $\vec{MN}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ :

$$\vec{MN}= ……………………………………………………………………………………$$

…………………………………………………………………………………..



**Définition - Base**

Trois vecteurs $\vec{i}$ , $\vec{j}$ et $\vec{k}$ constituent une base de l'espace si et seulement si …………………………………………………………………………………...

**Exemple**

Dans un cube $ABCDEFGH$, aucun des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ et $\vec{AG}$ n'est une combinaison linéaire des deux autres donc $\left(\vec{AB} , \vec{AD} ,\vec{AG}\right)$ est une base de l'espace.

**Propriété - Décomposition d'un vecteur dans une base**

Soit $\left(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k} \right)$ une base de l'espace, tout vecteur $\vec{u}$ peut décrire comme une combinaison linéaire unique des vecteurs $\vec{i}$ , $\vec{j}$ et $\vec{k}$ et on a :

$$\vec{u}= …………………………….$$

Et on dit que $………………………………………………………………………$ dans la base $\left(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k} \right)$.

**Démonstration**

……

**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$ muni de la base $\left(\vec{AB} , \vec{AD} ,\vec{AE}\right)$, on peut décomposer les vecteurs ainsi :

$\vec{AG} =\vec{AC} +\vec{AE} =\vec{AB} +\vec{AD} +\vec{AE}$ et $\vec{BH} =\vec{BA} +\vec{AH} = -\vec{AB} +\vec{AD} +\vec{AE}$ 

1. **Repérage dans l'espace**

**Propriété - Repère**

On appelle repère $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} \right)$ de l’espace le quadruplet où $O$ est un point de l’espace appelé origine et où le triplet $\left(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k} \right)$est une base de l'espace.

**Exemple**

Dans un cube $ABCDEFGH$, $\left(\vec{AB} , \vec{AD} ,\vec{AE}\right)$ est une ……………………………………… donc $\left(A ;…………………………\right) $est un ……………………………..

**Corollaire - Coordonnées d'un point**

Dans un repère $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} \right)$, pour tout point $M$ de l'espace il existe un triplet $(x ; y ; z)$ unique tel que $ \vec{OM}= ………………………..$ où $x$ s'appelle ………………., $y$ …………………. et $z$ la ……..



**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$ muni du repère $\left(A ; \vec{AB} , \vec{AD} ,\vec{AE}\right)$ les coordonnées des autres sommets du cube sont $……………………………………………………………………….. $car par exemple : $…………………………………………………….$

**Remarque**

Les opérations sur les coordonnées dans l'espace sont les mêmes que celles dans le plan.

**Propriété - Coordonnées d'un vecteur**

Comme dans le plan si $A\left(x\_{A} ; y\_{A} ;z\_{A}\right)$ et $B\left(x\_{B} ; y\_{B} ;z\_{B}\right)$ alors $………………$.

**Exemple**

Dans le cube $ABCDEFGH$ muni du repère $\left(A ; \vec{AB} , \vec{AD} ,\vec{AE}\right)$ on a les coordonnées des vecteurs $\vec{GH}………………$ et $\vec{FC}……………..$

**Propriété - Représentation paramétrique d'une droite**

Dans un repère $\left(O ; \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} \right)$, la droite passant par le point $A\left(x\_{A} ; y\_{A} ;z\_{A}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}\right)$ admet comme représentation paramétrique le système $…………………………………..$

**Démonstration**

$$……..$$

**Remarque**

On peut trouver une autre représentation paramétrique de la même droite en changeant de point et/ou en prenant un autre vecteur directeur colinéaire au précédent.

**Exemple**

Une représentation paramétrique de la droite de l'espace passant par le point $A(-1 ; 2 ; -3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{matrix}1\\-4\\-2\end{matrix}\right)$ est $……………………………………………..$