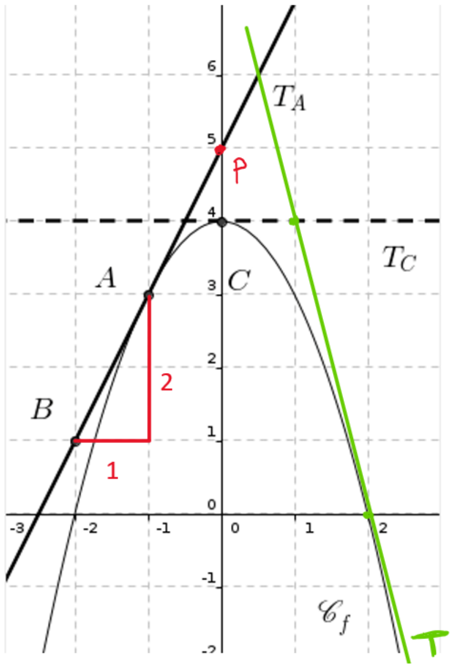
Devoir de Mathématiques n°1

Classes de première générale — samedi 8 octobre 2022

Exercice 1 (8 points)

On a représenté dans le repère ci-contre, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
On considère les points $A(-1\ ;\ 3), B(-2\ ;\ 1)$ et $C(0\ ;\ 4)$.
Les droites T_A et T_C sont des tangentes à la courbe C_f représentative de f , respectivement en A et C
On admet qu'une équation cartésienne de la droite (AB) est :

$$6x - 3y + 15 = 0.$$



1. Donner par lecture graphique et sans justification :

a) Le coefficient directeur de T_A.

Le coefficient directeur de la droite T_A est égal à $+2$ (voir graphique)

b) L'équation réduite de T_A.

L'équation réduite de T_A est : $y = 2x + 5$ (l'ordonnée à l'origine est égale à 5).

2. Soient $D(25;\ 37)$ et $E(126;\ 240)$ des points du plan.

a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de (AB).

La droite (AB) passe par les points $A(-1;\ 3)$ et $B(-2;\ 1)$ donc $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB).

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\1-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}126-25\\240-37\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}101\\203\end{pmatrix}$.

c) Déterminer une équation cartésienne de (DE).

Une équation cartésienne de (DE) est de la forme $ax + by + c = 0$ où $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (DE). Comme $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}101\\203\end{pmatrix}$ dirige (DE) alors $-b = 101$ et $a = 203$ ou encore $a = 203$ et $b = -101$.

$$D(25;\ 37) \in (DE) \Leftrightarrow \ 203 \times 25 - 101 \times 37 + c = 0 \ \Leftrightarrow \ c = -1338$$

On a alors (DE): $203x - 101y - 1338 = 0$

d) Les droites (DE) et (AB) sont-elles sécantes ou parallèles ? Justifier.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}101\\203\end{pmatrix}$. $\frac{101}{-1} \neq \frac{203}{-2}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et, par conséquent, les droites (DE) et (AB) ne sont pas parallèles, elles sont sécantes.

3. Soit T la droite passant par le point de coordonnées$(1\ ;4)$ et par le point de C_f ayant pour abscisse 2.
On admet que pour tout réel x, $f(x) = -x^2 + 4$

a) Déterminer, par le calcul, le coefficient directeur de la droite T.

Le point de C_f ayant pour abscisse 2 admet pour coordonnées $(2\,;f(2))$ or $f(2) = -2^2 + 4 = 0$ donc les coordonnées sont $(2\,;0)$.
Le coefficient directeur de la droite T est donc égal à $\frac{0-4}{2-1} = -4$.

b) Déterminer alors l'équation réduite de T puis la tracer dans le repère précédent.

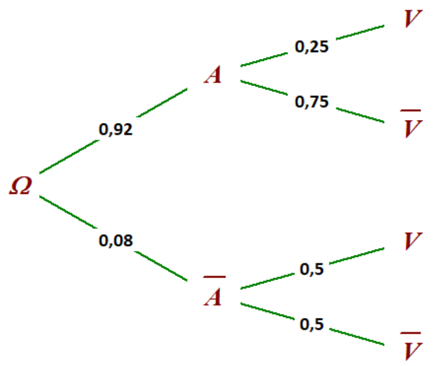
T admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur donc $m = -4$.
Le point $(1\,;4)$ appartient à T donc $4 = -4 \times 1 + p$ d'où $p = 8$.
En conclusion, l'équation réduite de T est $y = -4x + 8$.

Exercice 2 (6 points)

Une agence de voyage propose deux formules semaine pour se rendre à l'ile Maurice au départ de la Réunion. Les clients choisissent leur moyen de transport : bateau ou avion.
De plus, s'ils le souhaitent, ils peuvent compléter leur formule par l'option « visites guidées ».
Une étude a produit les données suivantes :

- 92 % des clients optent pour l'avion ;
- parmi les clients ayant choisi le bateau, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées » ;
- 23 % des clients ont choisi à la fois l'avion **et** l'option « visites guidées ».

On interroge au hasard un client de l'agence ayant souscrit à une formule semaine à l'ile Maurice.
On considère les évènements suivants :
A : « le client a choisi l'avion » et **V** : « le client a choisi l'option « visites guidées » »



1. En utilisant les événements A et V, traduire chacun des pourcentages de l'énoncé en une probabilité, puis compléter l'arbre pondéré, ci-contre, représentant la situation. (cet arbre sera complété au fur et à mesure de l'exercice)

- 92 % des clients optent pour l'avion se traduit par $P(A) = 0{,}92$
- Parmi les clients ayant choisi le bateau, 50 % choisissent aussi l'option « visites guidées » se traduit par $P_{\bar{A}}(V) = 0{,}5$
- 23 % des clients ont choisi à la fois l'avion **et** l'option « visites guidées » se traduit par $P(A \cap V) = 0{,}23$

2. Déterminer $P_A(V)$.

$$P_A(V) = \frac{P(A \cap V)}{P(A)} = \frac{0{,}23}{0{,}92} = \frac{23}{92} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Remarque : ceci se traduit par « parmi les clients ayant pris l'avion, 25 % ont choisi l'option visites guidées ».

3. Démontrer que la probabilité pour que le client interrogé ait choisi l'option « visites guidées » est égale à 0,27.

On veut montrer que $P(V) = 0{,}27$

$$P(V) = P(A \cap V) + P(\bar{A} \cap V) = 0{,}23 + 0{,}08 \times 0{,}5 = 0{,}27$$

4. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion sachant qu'il n'a pas choisi l'option « visites guidées ». Arrondir le résultat au centième.

On cherche $P_{\bar{V}}(A)$.

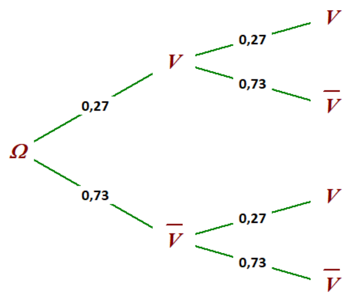
$$P_{\bar{V}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{0{,}92 \times 0{,}75}{1 - 0{,}27} = \frac{69}{73} \approx 0{,}95$$

5. Calculer la probabilité pour que le client interrogé ait pris l'avion **ou** l'option « visites guidées ».

On cherche $P(A \cup V)$.

$$P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(A \cap V) = 0{,}92 + 0{,}27 - 0{,}23 = 0{,}96$$

6. On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante.
Quelle est la probabilité qu'aucun des deux ne prennent l'option « visites guidées » ?



On cherche $P(\overline{V} \cap \overline{V})$.

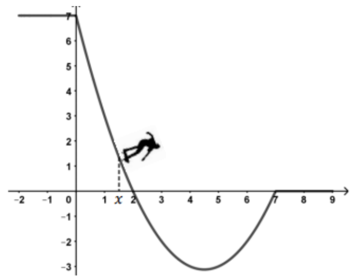
A l'aide de l'arbre ci-contre :

$$P(\overline{V} \cap \overline{V}) = 0{,}73 \times 0{,}73 = 0{,}5329$$

Exercice 3 (6 points)

Un skateur se lance sur une rampe d'un skate park.

On assimile le skateur à un point et on note $(x\ ;\ h(x))$ les coordonnées du skateur sur la rampe dans le repère ci-contre :



La fonction h est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ par :

$h(x) = 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 7$, où x et $h(x)$ sont exprimés en mètres.

1. À quelle hauteur le skateur se lance-t-il sur la rampe ?

$h(0) = 7$ donc le skateur se lance à la hauteur de 7 m.

2. Calculer l'image de 2 par h.

$$h(2) = 0{,}5 \times 2^2 - 4{,}5 \times 2 + 7 = 2 - 9 + 7 = 0$$

3. Montrer que pour tout réel x de $[0\ ;\ 7]$, $h(x) = 0{,}5(x-2)(x-7)$.

$$h(x) = 0{,}5(x-2)(x-7) = 0{,}5(x^2 - 7x - 2x + 14) = 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 7$$

4. Déterminer le tableau de signes de $h(x)$ puis donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles le skateur est en dessous de son point d'arrivée.

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$0{,}5(x-2)(x-7)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le skateur est en dessous de son point d'arrivée lorsque $h(x) < 0$ donc pour $x \in]2\ ;7[$.

5. Montrer que pour tout réel x de $[0\ ;\ 7]$, $h(x) = 0{,}5(x-4{,}5)^2 - 3{,}125$

$$\begin{aligned} 0{,}5(x-4{,}5)^2 - 3{,}125 &= 0{,}5(x^2 - 2 \times x \times 4{,}5 + 4{,}5^2) - 3{,}125 \\ &= 0{,}5x^2 - 4{,}5x + 10{,}125 - 3{,}125 \\ &= h(x) \end{aligned}$$

6. En utilisant la forme précédente, montrer que h admet un minimum égal à $-3{,}125$.
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Pour tout réel x, $0{,}5(x-4{,}5)^2 \geq 0$ donc $0{,}5(x-4{,}5)^2 - 3{,}125 \geq -3{,}125$.

On peut donc en déduire que la fonction h est minimale lorsque $0{,}5(x-4{,}5)^2 = 0$ soit pour $x = 4{,}5$ et le minimum vaut alors $-3{,}125$.

Le skateur passera donc à 3,125 m en dessous de son point d'arrivée.