DEVOIR DE MATHÉMATIQUES n°1

Durée : 2h00

La ***qualité de la rédaction***, la ***clarté*** et la ***précision des raisonnements*** constituent un objectif majeur pour les épreuves écrites de mathématiques et entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sauf précision contraire, un commentaire rédigé en français devra justifier toute formule, tout calcul, tout tableau.

L'usage des calculatrices est AUTORISE.

Exercice 1 (5 points)

Jérémy vend des pots de miel ou de confiture d'Ariège, soit un total de 1 200 pots par mois.
Il a obtenu la certification « produit biologique » pour les trois quarts de sa production.
Jérémy vend 800 pots de miel par mois.

On choisit un pot au hasard dans la production du mois.
On note C : «le pot choisi est un pot de confiture» et B : « le pot choisi est un produit biologique ».

1. Reproduire sur votre copie et compléter le tableau des effectifs suivant :

	M	C	$Total$
B	550	350	900
$\bar{B}$	250	50	300
$Total$	800	400	1200

1

2. Calculer les probabilités des événements B et C .

$$P(B) = \frac{900}{1200} = \frac{3}{4} \quad et \quad P(C) = \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$$

1

3. a) Décrire par une phrase les événements :

$$\bar{B} \;\; ; \;\; B \cap C \;\; ; \;\; B \cup C \;\; ; \;\; \bar{B} \cap M$$

$\bar{B}$: "le pot choisi n'est pas un produit biologique"

$B \cap C$: "le pot choisi est un pot de confiture et biologique"

$B \cup C$: "le pot choisi est un pot de confiture ou un produit biologique"

$\bar{B} \cap M$: "le pot choisi est un pot de miel non biologique"

1

b) Calculer leur probabilité.

$$P(\bar{B}) = \frac{300}{1200} = \frac{1}{4} \quad ; \quad P(B \cap C) = \frac{350}{1200} = \frac{7}{24}$$

2

$$P(B \cup C) = \frac{550 + 350 + 50}{1200} = \frac{950}{1200} = \frac{19}{24} \quad ; \quad P(\bar{B} \cap M) = \frac{250}{1200} = \frac{5}{24}$$

Exercice 2 (4 points)

Dans une entreprise comportant 3 000 salariés, 45 % d'entre eux utilisent régulièrement les activités proposées par le comité d'entreprise.
20 % des utilisateurs du C.E. sont inscrits à la salle de sport, réservée pour l'entreprise et, parmi ces inscrits, 15 % pratiquent le squash.
50 % des utilisateurs du C.E. achètent des tickets-loisirs. Parmi les salariés achetant ces tickets-loisirs, 60 % choisissent des places de cinéma.
Calculer :

a) le nombre de salariés utilisant régulièrement les activités proposées par le comité d'entreprise ;

45 % de 3 000 soit $\frac{45\times3000}{100}=1350$

b) la part des salariés inscrits à la salle de sport ;

20 % des utilisateurs du C.E. donc 20 % de 45 % des salariés soit $0{,}2\times0{,}45=0{,}09=9$ %.

La part des salariés inscrits à la salle de sport est donc de 9 %.

c) la part des salariés pratiquant le squash à la salle de sport ;

La part des salariés inscrits à la salle de sport est de 9 % et parmi eux, 15 % pratiquent le squash soit $0{,}09\times0{,}15=0{,}0135=1{,}35$ %.

d) le nombre des salariés utilisant le comité d'entreprise pour acheter des places de cinéma.

50 % des utilisateurs du C.E. donc $1350\times50\%=675$ achètent des tickets-loisirs et 60 % d'entre eux soit $675\times60\%=405$ choisissent des places de cinéma.

Exercice 3 (11 points)

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces.

Partie A : Lectures graphiques

À l'aide du graphique donné ci-dessous, répondre aux questions suivantes :

1. Quel est le montant des charges pour 5 pièces produites par jour ?

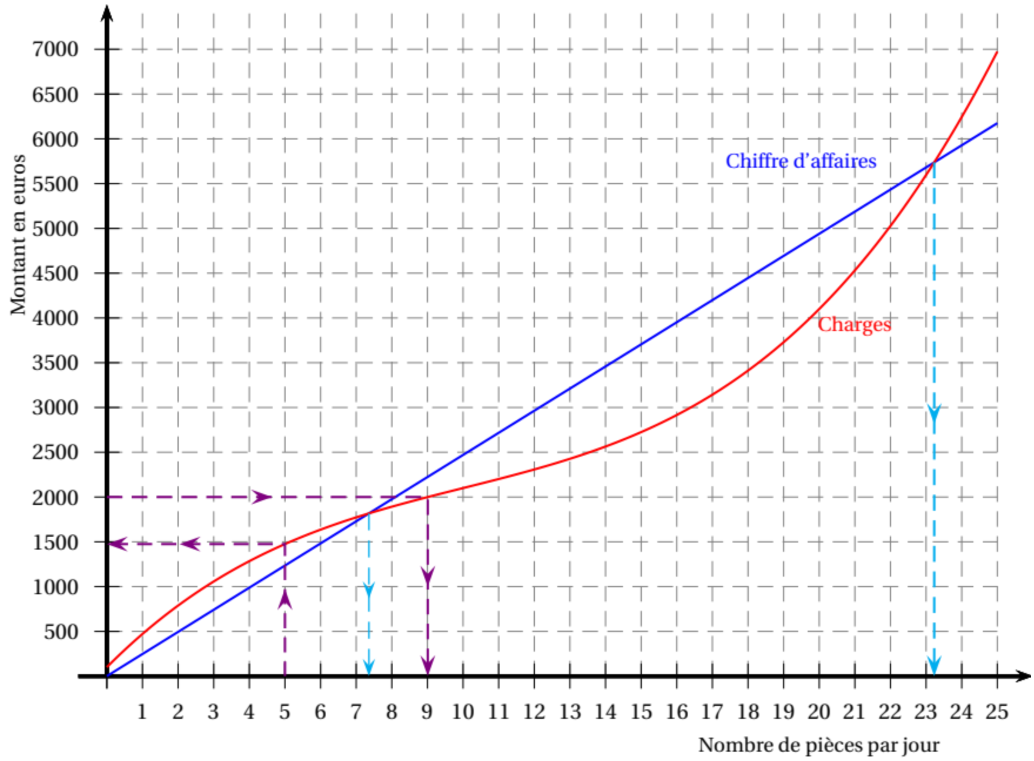
Nous lisons l'ordonnée du point de la courbe représentative de C d'abscisse 5, on trouve 1500.
le montant des charges pour 5 pièces produites par jour est donc égale à 1 500 euros.

2. Combien de pièces sont produites par jour pour un montant des charges de 2000 euros ?

Pour connaître combien de pièces sont produites par jour pour un montant des charges de 2000 euros, nous traçons la droite d'équation $y=2000$ et nous lisons l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la courbe représentative de C.
Avec la précision permise par le graphique, nous obtenons 9.
La production de 9 pièces entraîne un coût d'environ 2000 euros.

3. Quelles quantités produites par jour permettent à l'entreprise de réaliser un bénéfice ?

Les quantités produites par jour permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice sont les valeurs pour lesquelles la courbe représentant la recette est au-dessus de celle représentant les coûts c'est-à-dire les valeurs comprises entre les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de C et celle représentant la recette.
Nous lisons les abscisses des points d'intersection environ 7,4 et 23,2.
Par conséquent, l'entreprise réalise un bénéfice lorsque les quantités produites appartiennent à l'intervalle [8 ; 23].



Partie B : Étude du bénéfice

Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle [0 ; 25] par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100.$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

1. On note B la fonction bénéfice, exprimée en euros. Justifier que l'expression de $B(x)$ sur l'intervalle [0 ; 25] est : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$.

Le bénéfice étant égal à la différence entre les recettes et les coûts, nous avons donc $B(x) = 247x - C(x)$.

$$B(x) = 247x - (x^3 - 30x^2 + 400x + 100) = -x^3 + 30x^2 + (247 - 400)x - 100$$

L'expression de $B(x)$ sur l'intervalle [0 ; 25] est bien : $B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$.

2. On note B' la fonction dérivée de la fonction B.
Calculer $B'(x)$, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 25].

$$B'(x) = -(3x^2) + 30(2x) - 153 = -3x^2 + 60x - 153$$

3. Justifier le tableau suivant :

x	0		3		17		25
signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Étudions le signe de $B'(x)$.
Calculons Δ ; $\Delta = 60^2 - 4 \times (-3) \times (-153) = 1764 = 42^2$.
$\Delta > 0$ Le trinôme a donc deux racines $x_2 = \frac{-60-42}{-6} = 17 \quad x_1 = \frac{-60+42}{-6} = 3$.
$\Delta > 0$ Le trinôme est du signe de a $(a = -3)$ pour tout $x \in]-\infty\,;\, x_1[\cup]x_2\,;\, +\infty[$ et du signe de $(-a)$ $(-a = 3)$ pour tout $x \in]x_1\,;\, x_2[$, d'où le tableau.

4. En déduire le tableau de variations **complet** de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 25].

$B'(x) > 0$ sur]3 ; 17[par conséquent B est strictement croissante sur cet intervalle.
Si pour tout $x \in I, f'(x) > 0$ alors la fonction f est strictement croissante sur I

$B'(x) < 0$ sur]0 ; 3[ou sur]17 ; 25] par conséquent la fonction B est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.
Dressons le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 25].

x	0		3		17		25
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation de B	-100	↘	-316	↗	1056	↘	-800

5. Déterminer le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal. Que vaut alors ce bénéfice maximal ?

Le nombre de pièces que l'entreprise doit produire chaque jour pour que le bénéfice réalisé soit maximal est 17, la fonction B admettant en 17 un maximum local. Ce bénéfice maximal vaut alors 1056 euros.

Partie C : Coût moyen

On appelle coût moyen la fonction C_M définie sur l'intervalle]0 ; 25] par $C_M = \frac{C(x)}{x}$.

1. Calculer $C_M(16)$ et $C_M(17)$. *On arrondira au centime d'euro.*

$C_M(x) = \frac{x^3-30x^2+400x+100}{x} = x^2 - 30x + 400 + \frac{100}{x}$. Calculons :

$C_M(16) = 16^2 - 30 \times 16 + 400 + \frac{100}{16} = 182.25$

$C_M(17) \approx 184.88$

les résultats sont donnés à 10^{-2} près.

x	0		15,2		25
$C_M(x)$	‖	↘	181,6	↗	279

2. On donne le tableau de variations de la fonction C_M :
L'affirmation suivante est-elle vraie ? *Lorsque le bénéfice de l'entreprise augmente, le coût moyen diminue*. Justifier la réponse.

L'affirmation suivante *Lorsque le bénéfice de l'entreprise augmente, le coût moyen diminue* est fausse.
Le bénéfice de l'entreprise augmente sur [15.2 ; 17]. Il en est ainsi aussi du coût moyen.