Première Spé	**Évaluation de mathématiques n°4** **Dérivées - variations (1h45 mn)**	**Jeudi 17 novembre 2022**

Exercice 1

7 points

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$a)\ \ f(x) = -4x - 2$	$b)\ g(x) = 2x^2 + 3x - 4$	$c)\ h(x) = 3x^4 - \sqrt{7}\,x^2 - \dfrac{1}{2}$
$d)\ \ i(x) = \sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$	$c)\ h(x) = \dfrac{3x+1}{2x-3}$	

$$a)\ \ f'(x) = -4 \times 1 - 0 = -4$$

$$b)\ \ g'(x) = 2 \times 2x + 3 \times 1 - 0 = 4x + 3$$

$$c)\ \ h'(x) = 3 \times 4x^3 - \sqrt{7} \times 2x + 0 = 12x^3 - 2\sqrt{7}x$$

$$d)\ \ i'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 6\sqrt{x}}{2x^2\sqrt{x}}$$

$$e)\ \ h'(x) = \frac{3 \times (2x-3) - (3x+1) \times 2}{(2x-3)^2} = \frac{6x - 9 - 6x - 2}{(2x-3)^2} = \frac{-11}{(2x-3)^2}$$

Exercice 2

7 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

1) Calculer la fonction dérivée de f puis étudier son signe.

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

f' est une fonction polynôme du second degré : $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 6 \times 12 = 36 > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 : $x_1 = \frac{18+6}{12} = 2$ et $x_2 = \frac{18-6}{12} = 1$.

Obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		1		2		$-\infty$
$Signe\ de$ $6x^2 - 18x + 12$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) En déduire les variations de f puis dresser son tableau de variation.

Le signe de f' est maintenant connu donc :

- f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\ 1]$ et sur $[2\,;\ +\infty[$.
- f est strictement décroissante sur $[1\,;\ 2]$.

On obtient alors de tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	6	↘	5	↗	

3) Montrer que la fonction f admet deux extremums dont vous donnerez la valeur exacte.

La dérivée de f s'annule en changeant de signe en $x = 1$ et en $x = 2$ donc la fonction f admet deux extremums. Un maximum en $x = 1$ valant $f(1) = 6$ et un minimum en $x = 2$ valant $f(2) = 5$.

4) Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse $x = 0$.

L'équation générale de la tangente T est $y = f'(0) \times (x - 0) + f(0)$.

$f(0) = 1$ et $f'(0) = 12$ donc $T: y = 12x + 1$

Exercice 3

6 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ par $g(x) = \frac{2x-1}{1-3x}$ et C_g sa courbe représentative dans un repère.

1) Justifier que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

g est quotient, il faut donc que son dénominateur soit non nul donc que $1 - 3x \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq \frac{1}{3}$.

Donc la fonction g est définie pour tout réel différent de $\frac{1}{3}$ ce qui peut se noter $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

2) Montrer que $g'(x) = \frac{-1}{(3x-1)^2}$ et en déduire son signe.

On utilise la formule du quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$g'(x) = \frac{2 \times (1-3x) - (2x-1) \times (-3)}{(1-3x)^2} = \frac{2 - 6x + 6x - 3}{(1-3x)^2} = \frac{-1}{(1-3x)^2} = \frac{-1}{(3x-1)^2}$$

$-1 < 0$ et $(3x-1)^2 > 0$ donc $g'(x) < 0$ sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

3) Dresser le tableau de variation de g.

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ $g'(x) < 0$ donc la fonction g est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,; \frac{1}{3}\right[$ et sur $\left]\frac{1}{3}\,; +\infty\right[$ On peut donc dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	?	$\searrow$	? $\|\|$?	$\searrow$	?

4) La fonction g admet-elle des extremums ? (justifier)

La dérivée ne s'annule pas et ne change pas de signe donc il n'y a pas d'extremum.

Exercice 4 - Tout résultat donné sans justification ne sera pas pris en compte

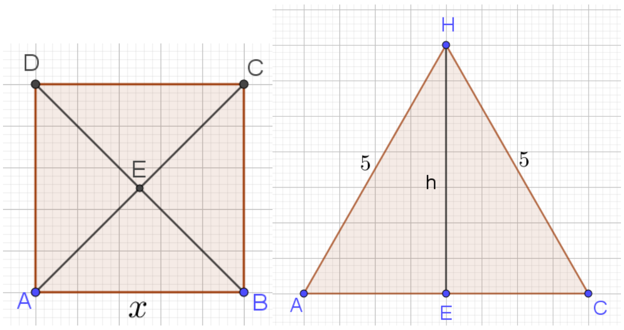
2+1 points

Le propriétaire d'un terrain souhaite aménager un espace habitable original sous la forme d'une tente pyramidale à base carrée dont la structure serait constituée de quatre grandes perches en bois de 5 m de longueur posées au sol et se rejoignant au sommet.

Quelle hauteur de la pyramide faut-il prévoir afin d'avoir un volume maximum ?

Rappel du volume d'une pyramide : $V = \frac{1}{3} \times Aire(Base) \times Hauteur$

Vue de dessus Vue de profil



Soit V le volume de la pyramide, h sa hauteur et x la longueur du côté du carré de base.

$$\text{Alors } V = \frac{1}{3}x^2h.$$

D'après le théorème de Pythagore, $h^2 + AE^2 = 5^2$ et sachant que la diagonale du carré mesure $x\sqrt{2}$, on a :

$$h^2 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow h^2 + \frac{2x^2}{4} = 25 \Leftrightarrow 2h^2 + x^2 = 50 \Leftrightarrow x^2 = 50 - 2h^2$$

Comme $V = \frac{1}{3}x^2h$ on obtient $V = \frac{1}{3}(50 - 2h^2) \times h = -\frac{2}{3}h^3 + \frac{50}{3}h$

Etudions les variations de la fonction V.

$$V'(h) = -2h^2 + \frac{50}{3}$$

V' est un polynôme du second degré : $\Delta = 0^2 - 4 \times (-2) \times \frac{50}{3} = \frac{400}{3} > 0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes qui sont : $x_1 = \frac{-\sqrt{\frac{400}{3}}}{-4} = \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ et $x_2 = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$ et on obtient le tableau de signe suivant :

h	$-\infty$		$\frac{-5\sqrt{(3)}}{3}$		$\frac{5\sqrt{(3)}}{3}$		$+\infty$
$-2h^2+\frac{50}{3}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Sur l'intervalle $[0 ; 5]$, V' s'annule en changeant de signe en $h = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, on trouve que le volume maximum est atteint pour $h = \frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2,88$.

Exercice 5 – Super Bonus !

Si $x = 10^{-9}$ ou si $x = 10^{-10}$ alors le calcul de $\frac{1}{2x+1}$ donne le même résultat ?

Prouvez qui est le plus grand des deux résultats sinon (la calculatrice n'est pas une preuve).

Etudions les variations de $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

$$f'(x) = -\frac{1}{(2x+1)^2} < 0$$

Donc f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et ne conserve donc pas l'ordre.

Comme $10^{-9} > 10^{-10}$ alors $f(10^{-9}) < f(10^{-10})$ ou encore $\frac{1}{2\times 10^{-9}+1} < \frac{1}{2\times 10^{-10}+1}$