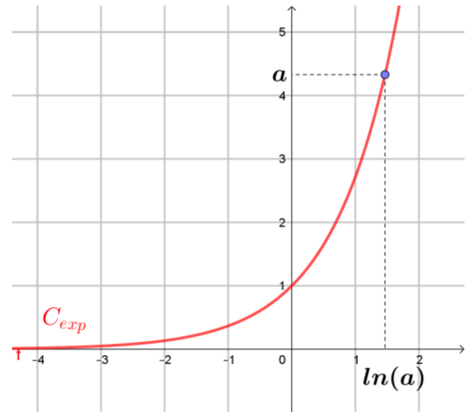
LOGARITHME NÉPÉRIEN

I. Fonction logarithme népérien



La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x =$ …. et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x =$ … ..

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a \in]0\,;+\infty[$, l'équation $\mathrm{e}^x = a$ …………………………………..

DÉFINITION

- On appelle logarithme népérien du réel strictement positif a, ……………………………………………..
  Le logarithme népérien de a est noté … … … … … … … ….
- La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction qui, à tout réel $x > 0$, associe le réel $\ln x$.

Exemple : D'après la calculatrice: $\ln(0{,}8) \approx -0{,}223$; $\ln(2{,}5) \approx 0{,}916$.

CONSÉQUENCE

- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout réel b, on a l'équivalence: …………………………………..
- $\ln(1) =$ … .. car … … … … … …
- $\ln(\mathrm{e}) =$ … … car … … … …..

Exemple : Résoudre l'équation $\mathrm{e}^{3x-1} = 5$.

PROPRIÉTÉS : Réciprocité

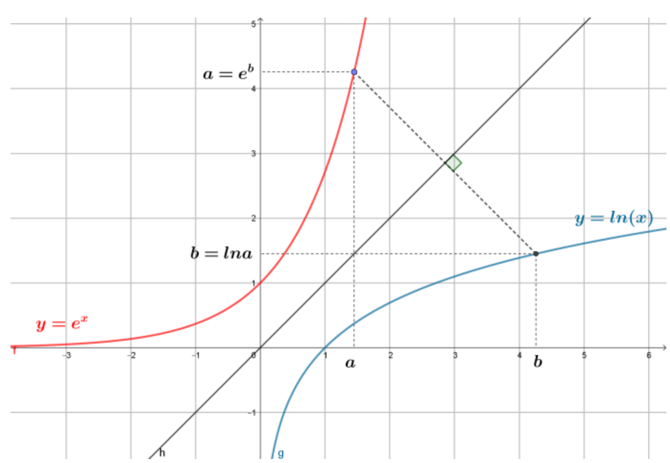
• Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln x} =$ ….	• Pour tout réel x , $\ln(\mathrm{e}^x) =$ … ….

Preuve :

….

Exemple : $\ln(\mathrm{e}^2) =$ … .. et $\mathrm{e}^{\ln 2} =$ … …

PROPRIÉTÉS : Courbes des fonctions ln et exp



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions ln et exp ……………………………
………………………………………………………...

Preuve :

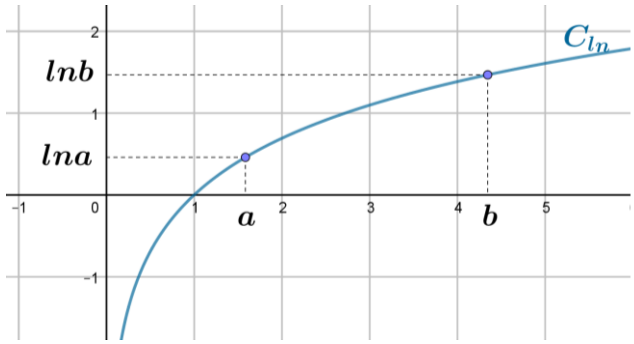
….

PROPRIÉTÉS : Sens de variation

La fonction ln est ……………………………..]0 ; +∞[.

Preuve :

….



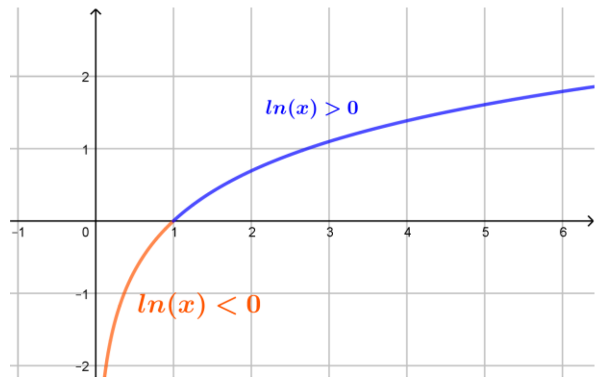
CONSÉQUENCE

Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow$ … … … … … ….
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow$ … … … … … …

Preuve :

….



CONSÉQUENCE

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow$ ……………..
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow$ … … … … … ..

MÉTHODE 1 - Résoudre une équation avec ln

Pour résoudre une équation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$:

- Rechercher l'ensemble E des réels tels que … … … … … et … … … … … ….
- Résoudre dans E, l'équation … … … … … … … … … ..

EXEMPLE : Résoudre l'équation $\ln(x+2) = \ln(3-x)$.

MÉTHODE 2 - Résoudre une inéquation avec ln

Pour résoudre une équation du type $\ln\big(u(x)\big) < \ln(v(x))$:

- Rechercher l'ensemble E des réels tels que … … … … … … … … … … … … … …
- Résoudre dans E, l'équation … … … … … … … … … ….

EXEMPLE : Résoudre l'inéquation $\ln(x^2 + 3x) < \ln 18$.

II. Propriétés algébriques

PROPRIÉTÉS : Relation fonctionnelle

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) =$ ... ...

Preuve :
…

Remarques :
On dit que la fonction $\ln$ transforme les produits en …………………
Cette formule se généralise à un produit de trois facteurs ou plus.

PROPRIÉTÉS : Logarithme d'un inverse, d'un quotient

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) =$……………………
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$……………………

Preuve :
…

PROPRIÉTÉS : Logarithme d'une puissance, d'une racine carrée

Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier relatif n,

- $\ln(a^n) =$…………………
- $\ln(\sqrt{a}) =$………………..

Preuve :
…

EXEMPLE
Écrire chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

- $A = 3\ln 2 + \ln 4$
- $B = \ln(\sqrt{8})$
- $C = \ln 20 - \ln 5$

MÉTHODE 3 - Résoudre une inéquation avec inconnue à l'exposant

EXEMPLE : Résoudre l'inéquation $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 0{,}01$ avec $n \in \mathbb{N}$.

III. Étude de la fonction logarithme népérien

PROPRIÉTÉS : Dérivée de la fonction $\ln$

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) =$…………..

Preuve :

…

PROPRIÉTÉS : Limites aux bornes

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \dots\dots\dots\dots \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = \dots\dots\dots\dots\dots$$

Preuve :

Remarques :

Une équation de la tangente à la courbe de la fonction $\ln$ en 1 est :

$$y = \dots\dots.\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \quad \text{soit} \quad y = \dots\dots\dots\dots$$

IV. Autres limites

PROPRIÉTÉS : Croissance comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

Preuve :

…

PROPRIÉTÉS : Limite et taux d'accroissement

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Preuve :

…

MÉTHODE 4 – Lever une indétermination pour étudier une limite

Dans le cas d'une forme indéterminée qui fait intervenir la fonction $\ln$, on peut:
- factoriser et faire apparaître des limites déjà connues ;
- effectuer un changement de variable.

EXEMPLE

Déterminer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x - 2x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

V. Fonction $\ln(u)$

NOTATION : u est une fonction strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est notée $\ln(u)$ ou $\ln u$.

PROPRIÉTÉS : Dérivée de $\ln u$

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I, et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

CONSÉQUENCE

u étant strictement positive, $(\ln u)'$ et u' sont de même signe. On en déduit que les fonctions u et $\ln u$ ont le mààme sens de variation sur I.

MÉTHODE 5 - Calculer la dérivée d'une fonction du type $\ln u$

Pour dériver une fonction du type $\ln u$ sur un intervalle I, on s'assure que la fonction u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I.

EXEMPLE : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 3)$. Calculer $f'(x)$.

MÉTHODE 6 - Étudier les limites d'une fonction du type $\ln u$

Pour étudier les limites d'une fonction du type $\ln u$, on peut:
- utiliser le théorème sur la limite d'une composée;
- utiliser les théorèmes de comparaison.

EXEMPLE : f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right)$.
Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

VI. Fonction logarithme décimal

DÉFINITION

La fonction logarithme décimal, notée $\log$, est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

PROPRIÉTÉS

1. Pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$.
2. La fonction $\log$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
3. Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\log(ab) = \log(\mathrm{a}) + \log(\mathrm{b}) \quad \text{et} \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(\mathrm{a}) - \log(b).$$

Les logarithmes décimaux trouvent toute leur utilité en chimie (calcul de pH), en acoustique (mesure du son), en sismologie (magnitude d'un séisme), en astronomie (magnitude apparente d'un astre)...