Fonction ln
Fiche d'exercices (Sésamath)

Propriétés algébriques

12 Exprimer les nombres suivants sous forme d'un entier ou d'un inverse entier.

1) $A = e^{2\ln 3}$
2) $B = e^{4\ln 2}$
3) $C = e^{-\ln 4}$
4) $D = e^{-5\ln 2}$

13 Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1) $A = e^{\ln 6 - 2\ln 3}$
2) $B = e^{3\ln 2 - \ln 4 + 1}$
3) $C = \dfrac{e^{\ln 5 - 1}}{e^{2+\ln 5}}$
4) $D = \dfrac{e^{2\ln 3 - \ln 2}}{e^{-3\ln 2}}$

14 Exprimer chacun des nombres suivants sous la forme $\ln c$ où c est un réel strictement positif.

1) $A = 2\ln 5 + \ln 3$
2) $B = 3\ln 3 - 2\ln 2$
3) $C = -\ln 5 + 3\ln 2$
4) $D = 3\ln 4 - 3\ln 2$

17 Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

1) $\ln 20$
2) $\ln 100$
3) $\ln\left(\dfrac{4}{25}\right)$
4) $\ln\sqrt{10}$

18 Exprimer chacun des nombres suivants en fonction de $\ln 3$ et $\ln 7$.

1) $\ln\left(\dfrac{81}{7}\right)$
2) $\ln 441$
3) $\ln\left(\dfrac{49}{27}\right)$
4) $\ln\sqrt{21}$

Équations

21 Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(x+5) = \ln 3$;
2) $\ln(x^2) = \ln 9$;
3) $\ln(x^2 + x) = \ln 6$.

22 Résoudre les équations suivantes :

1) $2 + 3\ln x = 14$;
2) $\ln(x^2) = \ln 9$;
3) $e^{2-3x} = 5$;
4) $2e^{2x} - 10 = 0$.

24 Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln(2-x) + 1 = 0$;
2) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 5$;
3) $\ln(3x) - \ln(1-x) = \ln 2$.

25 Changement de variable

1) Résoudre l'équation $X^2 - 2X - 15 = 0$.
2) En déduire les solutions des équations suivantes :
   a) $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$;
   b) $(\ln x)^2 - 2\ln x - 15 = 0$.

Inéquations

28 Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2\ln(x) \geqslant \ln(2-x)$;
2) $\ln(x) + \ln(2x+5) \leqslant \ln 3$;
3) $\ln(4x) - \ln 2 < 2\ln 4$.

31 Résoudre les inéquations suivantes :

1) $2e^x - 3 > 9$
2) $4e^x - 1 \geqslant e^x + 5$
3) $e^{2x} - 5e^x < 0$

32 Résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(-2x+1) \leqslant 0$
2) $\ln\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right) \geqslant 0$
3) $\ln(2x-1) + 1 > 0$

34 Un enquêteur effectue un sondage par téléphone. La probabilité que le correspondant décroche et accepte de répondre à l'enquête est de $\dfrac{1}{5}$.

Combien d'appels l'enquêteur doit-il passer au minimum, pour que la probabilité qu'au moins un correspondant réponde au sondage soit supérieure à $0,999$?

Limites

36 Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left((\ln x)^2 - 3\ln x\right)$
2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(-(\ln x)^2 + 2\ln x - 3\right)$

39 Soit f la fonction définie sur $\left]0\,;\dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x + 1}$.

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Quelles conséquences graphiques peut-on en déduire ?

Étude de fonction

41 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

1) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2) Pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.

3) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

4) En déduire que f admet un minimum sur $]0\,;+\infty[$ que l'on précisera.

42 Déterminer la dérivée de chaque fonction sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1) $f(x) = 3x + 5 - \ln x$

2) $f(x) = \ln x + x^4$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x} + 4\ln x$

4) $f(x) = (\ln x)(x+1)$

45 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$.

1) $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{2}x^2$

2) $f(x) = 5x - x\ln x$

3) $f(x) = \dfrac{3-\ln x}{x}$

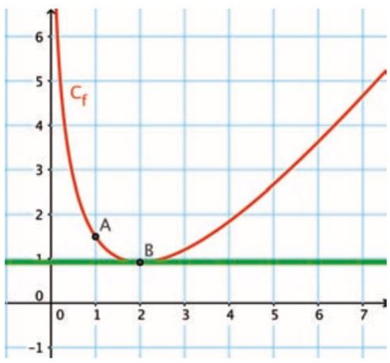
46 Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f définie sur l'intervalle I.

1) $f(x) = 2 - 5(\ln x)^2$ sur $I =]0\,;+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{4}{\ln x}$ sur $I =]0\,;1[$

3) $f(x) = \mathrm{e}^{2\ln x - x}$ sur $I =]0\,;+\infty[$

47 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = ax + b\ln x$ où a et b sont des réels. On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Le point $A\left(1\,;\dfrac{3}{2}\right)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 2 est horizontale.



1) Donner $f(1)$ et $f'(2)$.

2) Calculer les réels a et b.

3) Étudier le sens de variation de la fonction f.

48 CALC

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln x + x^2.$$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

3) Dresser le tableau de variation complet de f.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0\,;+\infty[$.

5) À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α.

49 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (d'unité graphique 2 cm).

1) Montrer que $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes.

2) **a)** Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{-\ln x}{x^2}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

4) Déterminer une équation de la tangente T au point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

5) Construire $\mathscr{C}$ et T.

50 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) **a)** Étudier la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale.

2) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{3(\ln x - 1)(\ln x + 1)}{x}.$$

3) Dresser le tableau des variations de f.

4) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5) Construire $\mathscr{C}$ et son asymptote.