CONVEXITÉ

I. Dérivée seconde

Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.
On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la ………………………….. et on note :
… … … … … … … … … … … … … …

Exemple :

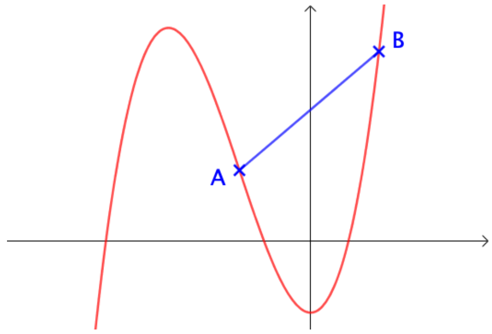
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) =$……………………………..
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) =$…………………………….

II. Fonction convexe et fonction concave

1) Définitions avec les cordes

Définition

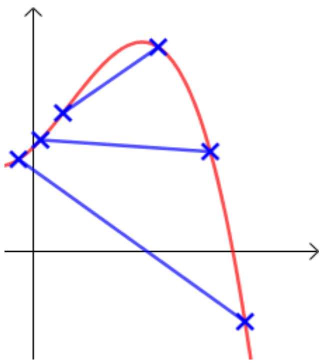
Une **corde** est …………………………………………………………………..



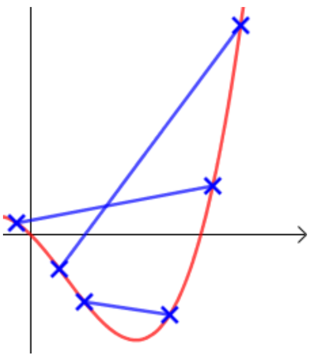
Définitions

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

- La fonction f est **conVexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est ……
- La fonction f est **concAve** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est ……



Fonction ……………



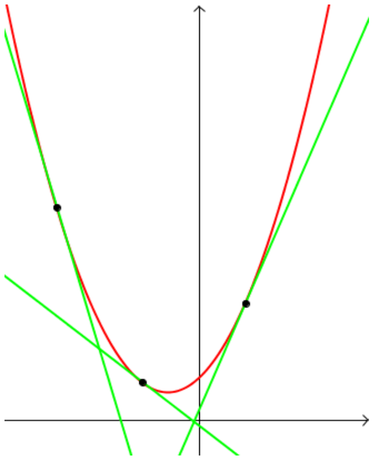
Fonction …………………

2) Définitions avec les tangentes

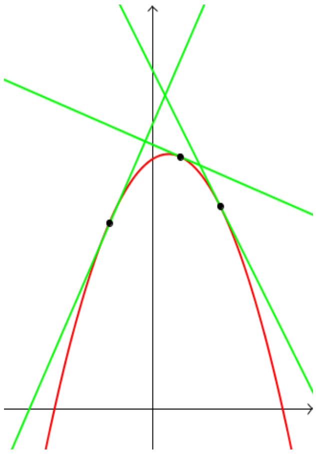
Définitions

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est **conVexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est ……
- La fonction f est **concAve** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est……



Fonction ……………



Fonction …………………

3) Propriétés

Propriétés

- La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est ………………………………
- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est ………………… sur $]-\infty\,; 0]$ et ………………….. sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est …………………… sur $]-\infty\,; 0[$ et …………………sur $]0\,;\,+\infty[$.
- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est ………………………….. sur $[0\,;\,+\infty[$.

- Admis -

Propriété

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Dire que la fonction f est convexe sur I, revient à dire que ………………………………………….., ……………………………………………..soit :

  … … … … … … … … … … … … … …, pour tout x de I.

- Dire que la fonction f est concave sur I, revient à dire que ………………………………………….., ……………………………………………..soit :

  … … … … … … … … … … … … …., pour tout x de I.

Démonstration au programme :

- Démontrons que f est convexe, si f' est croissante :

On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :

$g(x) = f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$.

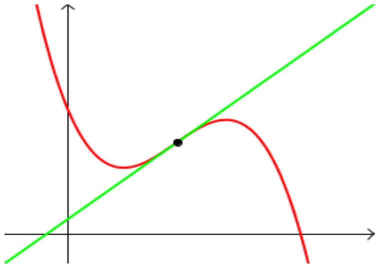
….

- Démonstration analogue pour prouver que f est concave, si f' est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d’une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
Étudier la convexité de la fonction f.

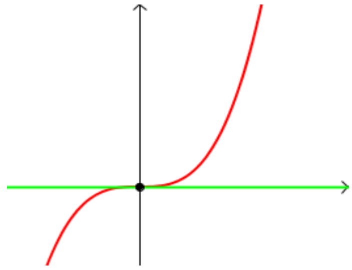
III. Point d'inflexion



Définition

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un **point d'inflexion** est un point où la courbe
……………………………………………………………………………...

Remarque importante :
Au point d'inflexion, la fonction change de …………………………..



Exemple :
On considère la fonction cube $x \longmapsto x^3$.

Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par : $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$.

1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l’exercice.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d’une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.
a) Étudier la convexité de la fonction f.
b) Déterminer l’équation de la tangente à la fonction f en -1.
c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.