CONVEXITÉ

**I. Dérivée seconde**

**Définition**

Soit une fonction $f$dérivable sur un intervalle I dont la dérivée $f'$ est dérivable sur I.

On appelle **fonction dérivée seconde** de $f$ sur I la …………………………..et on note :

$$…………………………………$$

**Exemple :**

Soit la fonction *f* définie sur $R$ par $f\left(x\right)=3x^{3}-5x^{2}+1$.

Pour tout *x* de$ R$, on a : $f'\left(x\right)=$……………………………..

Pour tout *x* de $R$, on a : $f''\left(x\right)=$…………………………….

**II. Fonction convexe et fonction concave**

1. Définitions avec les cordes

**Définition**

Une **corde** est …………………………………………………………………..



**Définitions**

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I.

* La fonction *f* est **conVexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est …………………………………………………………………………………………………………………………………
* La fonction *f* est **concAve** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est …………………………………………………………………………………………………………………………………



Fonction …………… Fonction …………………

1. Définitions avec les tangentes

**Définitions**

Soit une fonction *f* dérivable sur un intervalle I.

* La fonction *f* est **conVexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est …………………………………………………………………………………………………………………………………………
* La fonction *f* est **concAve** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est……………………………………………………………………………………………………………………………………



Fonction …………… Fonction …………………

1. Propriétés

**Propriétés**

- La fonction carré $x⟼x^{2}$ est ……………………………….

- La fonction cube $x⟼x^{3}$ est ………………… sur $\left]-\infty ;0\right]$ et ………………….. sur $\left[0 ; +\infty \right[$.

- La fonction inverse $x⟼$ $\frac{1}{x}$ est …………………… sur $\left]-\infty ;0\right[$ et ………………….sur $\left]0 ; +\infty \right[$.

- La fonction racine carrée $x⟼\sqrt{x}$ est …………………………… sur $\left[0 ; +\infty \right[$.

*- Admis -*

**Propriété**

Soit une fonction $f$ définie et dérivable sur un intervalle I.

* Dire que la fonction $f$ est convexe sur I, revient à dire que …………………………………………., …………………………………………………soit :

$……………………………………$, pour tout $x$ de I.

* Dire que la fonction $f$ est concave sur I, revient à dire que …………………………………………., ………………………………………………….soit :

$………………………………..$, pour tout $x$ de I.

Démonstration au programme :

- Démontrons que $f$ est convexe, si $f'$ est croissante :

On considère la fonction *g* dérivable sur I et définie par :

$g\left(x\right)=f\left(x\right)-f^{'}\left(a\right)\left(x-a\right)-f(a)$.

….

- Démonstration analogue pour prouver que $f$ est concave, si $f'$ est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d’une fonction

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^{3}-9x^{2}+4$.

Étudier la convexité de la fonction $f$.

**III. Point d'inflexion**



**Définition**

Soit une fonction $f$ dérivable sur un intervalle I.

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe ………………………………………………………………………...

Remarque importante :

Au point d'inflexion, la fonction change de …………………………..



Exemple :

On considère la fonction cube $x⟼x^{3}$.

Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication $C$ (en milliers d'euros) de $x$ milliers de clés produites s'exprime par : $C\left(x\right)=0,05x^{3}-1,05x^{2}+8x+4$.

1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction $C$.

En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

2) Démontrer ces résultats.

3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l’exercice.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d’une fonction

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par $f\left(x\right)=x^{3}-2x^{2}$.

a) Étudier la convexité de la fonction $f$.

b) Déterminer l’équation de la tangente à la fonction $f$ en –1.

c) En déduire que pour tout réel $x$ négatif, on a : $x^{3}-2x^{2}\leq 7x+4$.