

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2022/2023

BAC BLANC

MATHÉMATIQUES

Spécialité Maths

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 16

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4 .

L'utilisation d'une calculatrice, mode examen activé, est autorisée

Le candidat doit traiter les TROIS exercices.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (7 points)

Principaux domaines abordés: Probabilités conditionnelles et indépendance. Variables aléatoires.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1

Julien doit prendre l'avion; il a prévu de prendre le bus pour se rendre à l'aéroport.

S'il prend le bus de 8 h, il est sûr d'être à l'aéroport à temps pour son vol.

Par contre, le bus suivant ne lui permettrait pas d'arriver à temps à l'aéroport.

Julien est parti en retard de son appartement et la probabilité qu'il manque son bus est de 0,8.

S'il manque son bus, il se rend à l'aéroport en prenant une compagnie de voitures privées; il a alors une probabilité de 0,5 d'être à l'heure à l'aéroport.

On notera :

- B l'évènement: « Julien réussit à prendre son bus »;
- V l'évènement: « Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol » .

1. Donner la valeur de $P_B(V)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Montrer que $P(V) = 0,6$.
4. Si Julien est à l'heure à l'aéroport pour son vol, quelle est la probabilité qu'il soit arrivé à l'aéroport en bus ? Justifier.

Partie 2

Les compagnies aériennes vendent plus de billets qu'il n'y a de places dans les avions car certains passagers ne se présentent pas à l'embarquement du vol sur lequel ils ont réservé. On appelle cette pratique le surbooking.

Au vu des statistiques des vols précédents, la compagnie aérienne estime que chaque passager a 5 % de chance de ne pas se présenter à l'embarquement.

Considérons un vol dans un avion de 200 places pour lequel 206 billets ont été vendus. On suppose que la présence à l'embarquement de chaque passager est indépendante des autres passagers et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers se présentant à l'embarquement.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. En moyenne, combien de passagers vont-ils se présenter à l'embarquement ?
3. Calculer la probabilité que 201 passagers se présentent à l'embarquement. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} près.
4. Calculer $P(X \leq 200)$, le résultat sera arrondi à 10^{-3} près. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
5. La compagnie aérienne vend chaque billet à 250 euros.

Si plus de 200 passagers se présentent à l'embarquement, la compagnie doit rembourser le billet d'avion et payer une pénalité de 600 euros à chaque passager lésé.

On appelle :

Y la variable aléatoire égale au nombre de passagers qui ne peuvent pas embarquer bien qu'ayant acheté un billet;

C la variable aléatoire qui totalise le chiffre d'affaire de la compagnie aérienne sur ce vol.

On admet que Y suit la loi de probabilité donnée par le tableau suivant:

y_i	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y = y_i)$	0,94775	0,03063	0,01441	0,00539	0,00151	0,00028	

(a) Compléter la loi de probabilité donnée ci-dessus en calculant $P(Y = 6)$.

(b) Justifier que: $C = 51500 - 850Y$.

(c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire C sous forme d'un tableau.

Calculer l'espérance de la variable aléatoire C à l'euro près.

(d) Comparer le chiffre d'affaires obtenu en vendant exactement 200 billets et le chiffre d'affaires moyen obtenu en pratiquant le surbooking.

Exercice 2 (7 points)

Les parties A et B peuvent être abordées de façon indépendante.

Deux groupes de scientifiques, des spécialistes en environnement et des biologistes, étudient l'évolution d'une population de grenouilles autour d'un étang.

Partie A - Étude d'un modèle discret d'évolution

Le groupe de spécialistes en environnement étudie le taux de disponibilité des ressources nécessaires pour le développement de la population de grenouilles autour de l'étang. Ce taux dépend notamment du nombre de grenouilles présentes sur les lieux, de la quantité de nourriture à disposition, de l'espace disponible et de la qualité de l'environnement.

Une étude, menée en 2018 par ce premier groupe de scientifiques, a permis d'estimer le taux de disponibilité des ressources à 0,9 ; cela signifie que 90 % des ressources sont disponibles.

On modélise le taux de disponibilité des ressources par la suite (T_n) qui, à tout entier naturel n , associe le taux de disponibilité des ressources n années après 2018. On a ainsi $T_0 = 0,9$.

Le modèle choisi est tel que, pour tout entier naturel n , on a : $T_{n+1} = T_n - 0,1T_n^2$.

1. Certains spécialistes en environnement estiment qu'en 2022, le taux de disponibilité des ressources sera proche de 0,4. Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

2. On définit la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f(x) = x - 0,1x^2$.

Ainsi, la suite (T_n) vérifie pour tout entier naturel n , $T_{n+1} = f(T_n)$.

(a) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

(b) Montrer que pour tout n entier naturel, on a : $0 \leq T_{n+1} \leq T_n \leq 1$.

(c) La suite (T_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

(d) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

(e) Le groupe de spécialistes en environnement affirme que, selon ce modèle, le taux de disponibilité des ressources peut être inférieur à 0,4 au cours des vingt premières années qui suivent le début de l'étude et qu'il est capable de déterminer en quelle année, ce seuil serait atteint pour la première fois.

Cette affirmation est-elle conforme au modèle ? Pourquoi ?

Partie B - Étude d'un modèle continu d'évolution

Le groupe de biologistes a choisi une autre option et travaille sur le nombre de grenouilles peuplant l'étang. Au 1er janvier 2018, il avait été dénombré 250 grenouilles.

Les biologistes estiment que le nombre de grenouilles présentes autour de l'étang peut être modélisé par la fonction P définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$P(t) = \frac{1000}{0,4 + 3,6e^{-0,5t}}$$

où t est le temps, mesuré en années, écoulé depuis le 1er janvier 2018 (cette fonction découle d'un modèle continu, usuel en biologie, le modèle de Verhulst).

1. Calculer $P'(t)$ où P' est la fonction dérivée de P puis étudier le signe de $P'(t)$ pour t appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction P en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de la fonction P sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur $t_0 \in [0; +\infty[$ telle que $P(t_0) = 2000$. Déterminer cette valeur à 10^{-1} près.

4. Selon ce modèle, déterminer au cours de quelle année la population de l'étang aura dépassé pour la première fois les 2000 grenouilles.

Exercice 3 (6 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

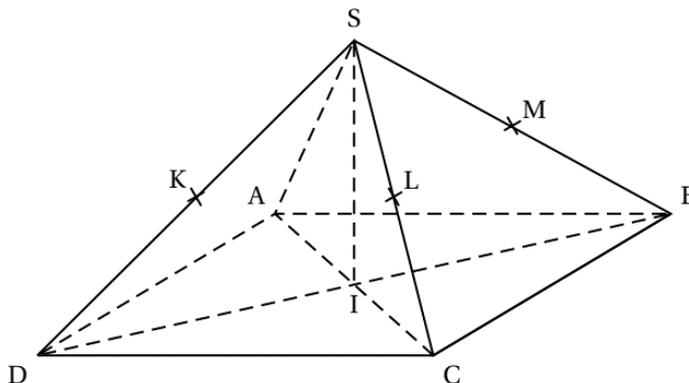
Partie A

SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Le point I est le centre du carré ABCD.

On suppose que : $IC = IB = IS = 1$.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].



1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires:

a. (DK) et (SD)	b. (AS) et (IC)	c. (AC) et (SB)	d. (LM) et (AD)
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $(I ; \overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IS})$.

Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants:

$$I(0; 0; 0); A(-1; 0; 0); B(0; 1; 0); C(1; 0; 0); D(0; -1; 0); S(0; 0; 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont:

a. $(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4})$	b. $(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$	c. $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2})$	d. $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1)$
--	---	---	-------------------------------------

3. Les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AS} sont:

a. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	b. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	c. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	d. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
--	--	---	--

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est:

a. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$	b. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 0 \\ z = 1 + 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$	c. $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$	d. $\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$
---	--	---	--

5. La section de la pyramide SABCD par le plan (KML) est :

a. un triangle	b. un rectangle non carré	c. un losange non carré	d. un carré
----------------	---------------------------	-------------------------	-------------

Partie B

6. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
    u = 2
    v = 1
    for k in range(1,11) :
        c = u
        u = u + 3*v
        v = c + v
    return (u, v)
```

Ce programme renvoie :

a. u_{11} et v_{11} ;	b. u_{10} et v_{10} ;	c. les valeurs de u_n et v_n pour n allant de 1 à 10;	d. u_0 et v_{10} .
---------------------------	---------------------------	---	------------------------