I. Fonction affine

II. Fonction polynôme du second degré

1) Définition et représentation

Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par … … … … … … … … … … … .. où a, b, c désignent des nombres réels, avec $a \neq 0$.

- La dérivée d'une fonction du second degré est … … … … … … … … … … … …
- Une fonction du second degré se représente par ……………………………
- L'allure de la parabole dépend ……………………………

Remarque

Pour obtenir l'allure de la parabole :

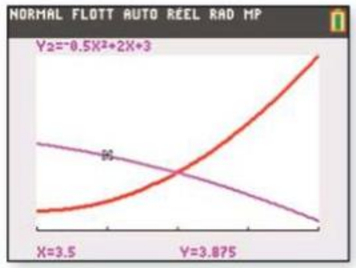
- on ………………………………………………………………………………………
- on regarde le signe du coefficient a : si … .. ………………………………………………………………………………………………

Exemples

Pour tout prix x de 3 à 5 euros le kilogramme de fromage fondu, la quantité offerte par les producteurs est modélisée par la fonction f telle que $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$.
Et la quantité demandée par les distributeurs est modélisée par :

$$g(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 3$$

Les quantités sont en tonnes. Ci-contre les représentations sur [3 ; 5] :



2) Équation du second degré

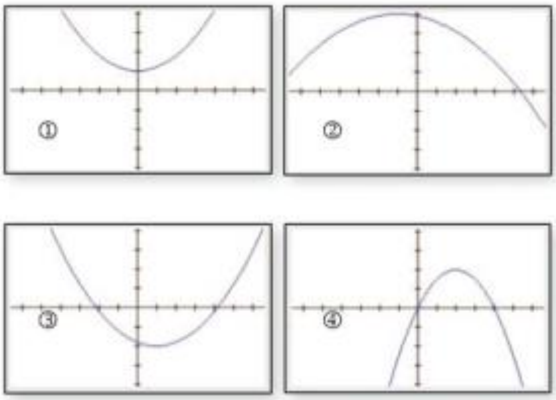
L'existence des solutions de l'équation du second degré $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, avec $a \neq 0$, dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

	Résolution algébrique	Résolution graphique
	L'équation $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$**…**	La parabole d'équation $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$**…**
$\Delta > 0$ positif		
$\Delta = 0$ nul		
$\Delta < 0$ négatif		

Exercices

10 ★ À la calculatrice, dans un repère d'unités 1, on a représenté quatre fonctions de bénéfice, du second degré. Pour chacune d'elles, indiquer :
- le signe du coefficient a ;
- les coordonnées de son sommet ;
- son sens de variation sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

Présenter les résultats dans un tableau.



11 ★ Dans chaque petit problème, on sera amené à résoudre une équation du second degré.

1. Le coût total, en euros, pour x kg de produits est : $f(x) = x^2 + 2x + 100$. Déterminer la quantité à produire pour obtenir un coût total de 460 €.

2. Le prix unitaire, en euros, pour une quantité offerte de q tonnes d'un bien est $f(q) = q^2 - 4q + 5$. Déterminer la quantité pour un prix de 2,96 €.

12 ★ **1.** Le bénéfice, en k€, pour une quantité de q milliers d'objets est $B(q) = -0{,}5\,q^2 + 4q$.
Déterminer la quantité pour un bénéfice de 8 k€.

2. Le prix unitaire, en euros, pour une quantité demandée de x centaines d'un bien est :

$$g(x) = 0{,}1x^2 - 2x + 12\,.$$

Déterminer la quantité, inférieure à 1 000 objets, pour un prix unitaire de 5,60 €.

13 ★ Pour chacune des situations de l'exercice 12 précédent, étudier le sens de variation des fonctions données sur $[\,0\,;+\infty\,[$.
On sera amené à utiliser la dérivée.

14 ★ Le bénéfice engendré par la vente de x centaines d'objets est donné, en centaines d'euros, par

$$B(x) = -x^2 + 5x - 2{,}5 \quad \text{où } x \in [\,0{,}5\,;5\,]\,.$$

1. a) Préciser le signe du coefficient a et dessiner l'allure de la courbe de la fonction B.

b) Résoudre l'équation $B(x) = 0$ et compléter l'allure de la courbe dessinée en **a)** en plaçant l'axe des abscisses et les solutions de cette équation.

2. Déterminer la plage de profit c'est-à-dire l'intervalle tel que $B(x)$ soit positif ou nul.
On arrondira les bornes à un objet près.

15 ★ Un producteur bio récolte et vend chaque jour q centaines de kg de fruits. Le bénéfice journalier engendré par la vente de ces fruits, en milliers d'euros, est :

$$B(q) = -q^2 + 20{,}4\,q - 25{,}6$$

pour une quantité q comprise entre 0 et 1 500 kg.

a) Sur tableur, calculer les valeurs de ce bénéfice de 0 à 1 500 kg, tous les 100 kg.
Attention à la formule à saisir.
Estimer pour quelle quantité le bénéfice semble maximal.

	A	B
1	**Bénéfice journalier**	
2	Quantité	Bénéfice
3	0	=-(A3^2)+20,4*A3-25,6
4	1	-6,2

b) Déterminer par le calcul la quantité qui réalise un bénéfice maximal.

16 ★★ On reprend l'exemple vu dans le cours :
- prix par kg de fromage fondu : x de 3 à 5 €
- offre en tonnes : $f(x) = 2x^2 - 12x + 19$
- demande en tonnes : $g(x) = -0{,}5\,x^2 + 2x + 3$.

1. Déterminer le prix d'équilibre p_0 du fromage fondu ; puis la quantité d'équilibre et le chiffre d'affaires CA_0 engendré, au prix d'équilibre.

2. Une subvention étant versée sur le lait, la fonction d'offre devient $h(x) = 2x^2 - 10x + 13{,}5$.
La demande est inchangée.

a) Représenter les fonctions f et h à la calculatrice.
Pour le même prix, comparer la nouvelle quantité offerte à l'ancienne.

b) Représenter les fonctions h et g. Estimer graphiquement le nouveau prix d'équilibre p_1.

c) Déterminer p_1 par résolution d'équation.
Comparer avec p_0.

3. Calculer le nouveau chiffre d'affaires CA_1 engendré par la vente à ce niveau d'équilibre.
Comparer avec CA_0 obtenu en **1.**

17 ★ Pour un prix horaire de p euros, variant de 10 € à 20 €, la quantité de services à domicile demandée est modélisée par $f(p) = 0{,}1\,p^2 - 4p + 73{,}6$ et la quantité offerte par $g(p) = 2p + 16$.
Les quantités sont en centaines d'heures.

1. Calculer $f'(p)$.
Résoudre l'équation $f'(p) = 0$.
En déduire le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[\,10\,;20\,]$.

2. On a représenté ci-dessous la fonction f :

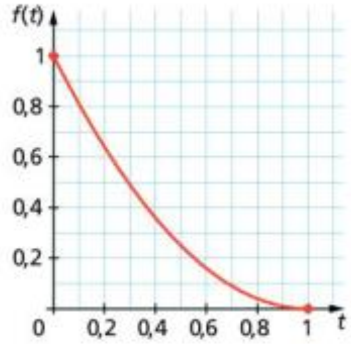
18 ★ Le prix d'un produit informatique a diminué de moitié en deux ans.

On se propose de retrouver le taux annuel moyen à l'aide d'une fonction.

On note t le taux annuel de diminution et $f(t)$ le coefficient multiplicateur sur deux ans.

1. Justifier que $f(t) = (1 - t)^2$, pour $t \in [0 ; 1]$.

2. On donne la courbe de la fonction f ci-dessous :



Résoudre graphiquement l'équation $f(t) = 0{,}5$.

3. Résoudre l'équation $t^2 - 2t + 1 = 0{,}5$.

4. En déduire le taux annuel moyen correspondant à une diminution de moitié sur deux ans.

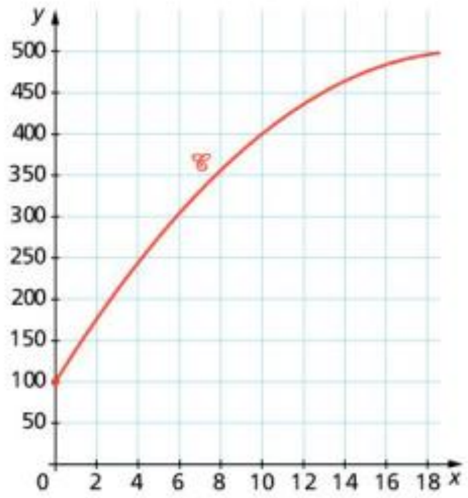
19 ★★ Une PME entrepose des palettes de matériel. Le coût de stockage, en centaines d'euros, est donné par $S(t) = -t^2 + 40t + 100$, où t est la durée de stockage, en jours. Lorsque le coût devient égal à 47 500 €, on doit impérativement déstocker.

1. a) Calculer les coûts fixes.

b) Calculer le coût de stockage au bout de 6 jours.

c) Calculer le coût supplémentaire de stockage pour le 7^e^ jour.

2. La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente ce coût :



a) D'après le graphique, au bout de combien de jours doit-on déstocker ?

b) Quelle équation doit-on écrire pour trouver la solution exacte ? La résoudre.

20 ★★ Une entreprise produit du shampoing haut de gamme. Le coût marginal, en euros par litre, pour x litres de shampoing fabriqués, est donné par :

$$C_m(x) = 2x^2 - 24x + 82, \text{ où } x \in [0 ; 12].$$

Le prix de vente d'un litre de shampoing est 28 €.

1. Représenter la courbe de la fonction C_m sur l'écran de la calculatrice.

Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction C_m est croissante. Justifier.

2. On admet que le profit maximal est obtenu pour la quantité telle que le coût marginal est égal au prix de vente unitaire, sur l'intervalle où le coût marginal est croissant.

a) Tracer la droite d'équation $y = 28$ à la calculatrice.

b) À l'aide de la calculatrice, estimer la quantité à produire pour laquelle le profit est maximal.

c) Retrouver ce résultat par le calcul.