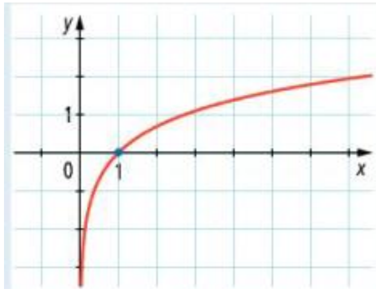
III. Fonction logarithme népérien

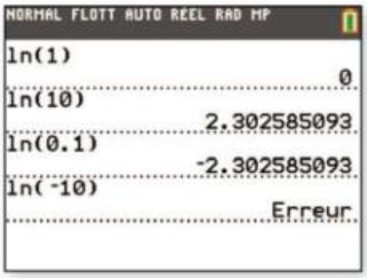
1) Définition et représentation

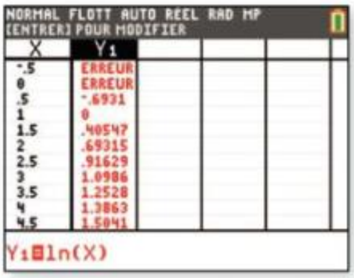
- La fonction logarithme népérien est la fonction …..telle que, à ……………………………………, on associe le nombre … … … … … .
- $\ln(x)$ est obtenu par la touche…………… de la calculatrice, avec … … … … …..
  La fonction ln est ……………………………….

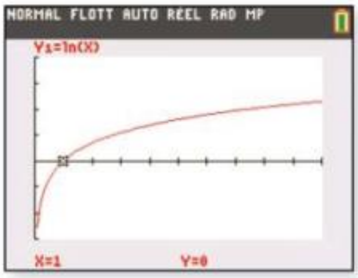


- La fonction ln se représente par une courbe située à droite de l'axe vertical des ordonnées et elle traverse l'axe horizontal des abscisses en … … … … … … … … … … ..
  Si $x \geq 1$, alors … … … … … … … … … … … … … … …
  Si $0 < x \leq 1$, alors … … … … … … … … … … … … …

À la calculatrice :







2) Propriétés de la fonction ln

Propriété fondamentale du logarithme
Pour tous réels a et b strictement positifs,

$$\ln(a \times b) = \text{… … … … … … … … ..}$$

Autres propriétés

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \text{… … … … … … … … … … ..}$$

$$\ln(a^b) = \text{… … … … … … … … … … ..}$$

- Si a est supérieur à 1 , alors $\ln(a)$ est ……………… et si a est entre 0 et 1 , alors $\ln(a)$ est ………

<u>**Exemple**</u>
Un capital de 1 000 € augmente chaque mois de 3 % .
Donc, tous les mois il est multiplié par 1,03 et au bout de n mois, il est multiplié n fois par 1,03 .
On cherche le nombre n de mois de placement pour que ce capital double.

Fonction logarithme népérien

22 ★ **1.** Sur une feuille de tableur, dresser le tableau de valeurs de la fonction ln , tous les 0,5 jusqu'en $x = 12$.

	A	B
1	x	$\ln(x)$
2	0,5	=LN(A2)
3	1	0
4	1,5	0,4055
5	2	0,6931
6	2,5	0,9163
7	3	1,0986

2. Des calculs sont indiqués ci-dessous dans les **cellules D1** à **H1** et dans les cellules **D3** à **H3**.
Effectuer ces calculs dans les **cellules D2 à H2**, et dans les cellules **D4** à **H4**. Laisser 4 décimales.

	D	E	F	G	H
1	ln(2)+ln(3)	2*ln(2)	3*ln(2)	2*ln(2)+ln(3)	ln(2)+ln(5)
2					
3	ln(1)+ln(7)	ln(1/7)	ln(2)+ln(5,5)	ln(12)-ln(3)	ln(7,5)-ln(3)
4					

3. On retrouve des résultats de la **colonne B**, ou les opposés de ces résultats. Expliquer pourquoi, en rappelant les propriétés de la fonction ln .

23 ★ À la calculatrice, représenter la fonction ln dans la fenêtre X $\in [-1 ; 10]$ et Y $\in [-5 ; 5]$.
a) D'après cette représentation, indiquer le signe des nombres suivants : ln(3) ; ln(1,05) ; ln(0,95) ; ln(1) ; ln(2,72) ; ln(0,9 5) ; $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$; $\ln\left(\dfrac{19}{7}\right)$.
b) Après avoir effectué le calcul, comparer ces nombres à 1 .
c) Tracer la droite horizontale d'équation $y = 1$.
Rechercher graphiquement le point d'intersection de cette droite avec la courbe de la fonction ln .

24 ★ **1.** Justifier qu'une population de 25 millions qui augmente de 1 % par an, devient $25 \times 1{,}01^{n}$ au bout de n années.
2. On cherche le nombre d'années nécessaire pour que cette population double.
Résoudre l'équation $25 \times 1{,}01^{n} = 50$ et conclure.

25 ★ Ricardo place 3 000 € sur un compte rémunéré au taux annuel de 5 % .
On note C_n le capital obtenu à l'année n et on pose $C_0 = 3\,000$.
Chaque fin d'année, les intérêts acquis s'ajoutent au capital.
1. a) Calculer les intérêts acquis la première année et le capital C_1 .
b) Calculer le capital acquis C_2 la 2e année.
c) Justifier que $C_2 = C_1 \times 1{,}05$.
2. On admet que le capital C_n peut s'écrire, pour tout entier n :
$$C_n = 3\,000 \times (1{,}05)^{n} .$$
a) Sur une feuille de tableur, en **colonne B**, calculer le capital acquis jusqu'à la 20e année.

	A	B	C	D
1	Année n	Capital C_n	ln(C_n)	Var. absolue
2	0	3000		
3	1			
4	2			

Lire le capital acquis au bout de 20 ans.
b) En **colonne C**, calculer ln(C_n) .
c) En **colonne D**, calculer la variation absolue entre deux valeurs consécutives de la **colonne C** :
pour cela, entrer en **D3** la formule =C3-C2 .
d) Comparer les nombres obtenus en **colonne D.**
Si on place les points (n , ln(C_n)) dans un repère, comment seront ces points ? Pourquoi ?
On pourra tracer à la calculatrice, la courbe :

`\Y1=ln(3000*1.05^X)`

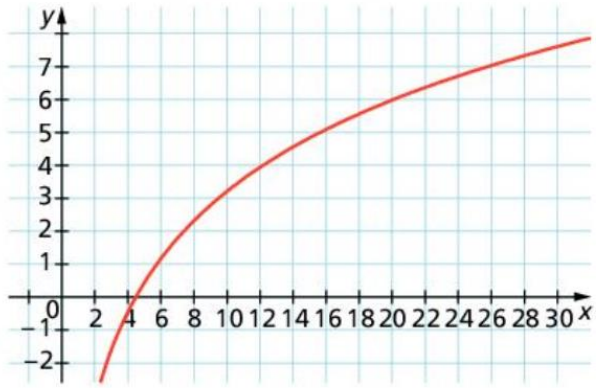
e) Proposer une autre écriture de ln(C_n) .
3. On cherche le nombre d'années n nécessaire pour que Ricardo obtienne 6 000 € .
a) Lire le résultat sur le tableur.
b) Montrer que l'équation $3\,000 \times 1{,}05^{n} = 6\,000$ équivaut à l'équation $n \times \ln(1{,}05) = \ln(2)$.
c) Résoudre cette équation et conclure.

26 ★★ On estime que la dépréciation annuelle de la valeur d'un camion est de 10 % par an.
Ce camion valait 70 000 € en janvier 2010 .
Sa valeur en janvier 2010 + n est $70\,000 \times 0{,}9^{n}$.
1. On décide de revendre ce camion lorsque sa valeur n'est plus que de 20 000 € .
a) Trouver la date de revente de ce camion en utilisant la calculatrice et la fonction telle que :

`\Y1=70000*0.9^X`

b) Trouver cette date en résolvant l'équation :
$$70\,000 \times 0{,}9^{n} = 20\,000 .$$
2. À quelle date la valeur de ce camion est-elle inférieure à 1 400 € ?

27 ★ Dans un pays dont la population active est de 30 millions, on modélise le PIB en fonction du nombre x d'emplois par la fonction f telle que :
$$f(x) = 4\ln(x) - 6 \text{ , pour } x \text{ supérieur à } 5 .$$
Le PIB est exprimé en centaines de milliards de dollars US et le nombre x d'emplois en millions.
1. La courbe ci-dessous est-celle de la fonction f :



a) Calculer $f(30)$. Arrondir à 0,1 près .
Interpréter ce résultat.

b) Dans ce pays, il y a 3,5 millions de chômeurs. Calculer le PIB de ce pays. Arrondir le résultat à 1 milliard près.

c) Par lecture graphique, donner le nombre d'emplois pour un PIB de 700 milliards de $.

2. L'épargne de ce pays représente 100 milliards de $. On imagine que l'on investit la totalité de cette épargne, ce qui augmente d'autant le PIB calculé ci-dessus en **1. b)** .

a) En s'aidant de la calculatrice, déterminer le nombre d'emplois total après cette augmentation du PIB.

b) Y aura-t-il encore des chômeurs ?

28 ★★★ Dans un pays dont la population active est de 20 millions, on modélise le PIB en fonction du nombre x d'emplois par la fonction f telle que :

$$f(x) = 450 \ln(x) - 560 \text{ , pour } x \text{ supérieur à } 12 .$$

Le PIB est en milliards d'unités monétaires et le nombre d'emplois en millions.

1. Calculer le PIB espéré si toute la population active est employée. Arrondir le résultat au milliard.

2. En réalité, le taux de chômage est de 10 % . Calculer le PIB réel (PR) de ce pays.

3. On aimerait augmenter le PIB réel de 5 % , grâce à des investissements et des nouvelles techniques de production.

a) Calculer le nouveau PIB. Arrondir le résultat au milliard près.

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre d'emplois correspondant à ce nouveau PIB.

c) En déduire la diminution du nombre de chômeurs.

29 ★★ Une entreprise fabrique des pièces pour véhicules. On note q le nombre de centaines de pièces fabriquées par mois, de 100 à 1 500 pièces.

Chaque mois, les coûts de production, exprimés en milliers d'euros, sont donnés par :

$$C(q) = 1{,}6 \ln(q) + 2 \text{ , avec } 1 \leqslant q \leqslant 15 .$$

1. a) À l'aide de la calculatrice, recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (arrondir à 10^{-1} près) :

q	1	2	3	4	5	6	7	8
$C(q)$		3,2		4,2	4,6	4,9	5,2	

q	9	10	11	12	13	14	15
$C(q)$		5,8		6,1	6,3		

b) Tracer la courbe représentative de la fonction C dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
Préciser le sens de variation de la fonction C .

2. Le prix de vente de 100 pièces est 0,8 millier d'euros.

a) Si l'entreprise vend q centaines de pièces, déterminer la recette $R(q)$, en milliers d'euros.

b) Tracer la droite $\mathscr{D}$ représentant la recette dans le repère précédent.

3. a) Vérifier que le bénéfice mensuel est :

$$B(q) = 0{,}8q - 1{,}6 \ln(q) - 2 \text{ , sur } [1 ; 15] .$$

b) Calculer une valeur approchée de $B(3)$ et $B(14)$, puis préciser pour chacun de ces cas si l'entreprise est bénéficiaire ou non.

c) En justifiant graphiquement la réponse, donner le nombre minimal de pièces qu'il faut fabriquer et vendre pour que l'entreprise soit bénéficiaire, c'est-à-dire le point mort de la production.