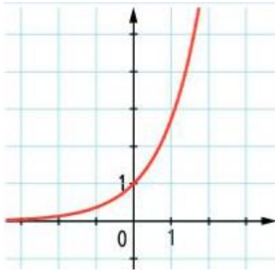
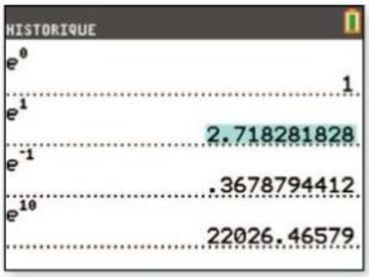
IV. Fonction exponentielle de bas e

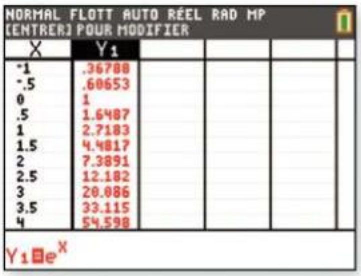
1) Définition et représentation

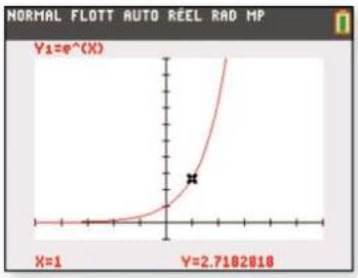
- La fonction exponentielle de base e est la fonction …..telle que, à …………….., on associe le nombre … … … … … … … … .. .
- … … … … … … est obtenu par la touche $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\text{ln}}$ de la calculatrice, avec … … … … … … … ….
- La fonction exp est **……………………………………………** .
- La fonction exp se représente par une courbe située ……………………………………………………… ………………………………………………………………
  Pour tout réel x, e^x est toujours ………………………………………….



À la calculatrice :







2) Propriétés de la fonction exp et lien entre ln et exp

- Pour tous réels a et b, on a ………………………………………
  Pour tout réel x, on a … … … … … … … … … … … … … … … … … ….
  Pour tout réel x strictement ……………………, on a … … … … … … … … … … …
- L'équation $\ln(x) = k$ a pour seule solution … … … … … … … … … … … ..
  L'équation $e^x = k$, avec $k > 0$, a pour seule solution … … … … … … … … … ..

Remarque
Garder en tête que la fonction exponentielle de base e croît très vite et que : … … … … … … … … … … … … … … ….

<u>Exemple</u>
Dans un pays, 20 % des ménages n'ont pas de véhicule et la répartition du parc motorisé est modélisée par la fonction f telle que $f(x) = 0{,}668 \times e^x - 0{,}816$ pour $x \geq 0{,}2$, où $f(x)$ est la proportion du parc motorisé détenue par la proportion x des ménages du pays.
Ainsi : $f(0{,}5) =$ … … … … … … … … … … … … … … … … … signifie que ………… des ménages du pays possèdent …………………….. du parc motorisé.
La courbe de la fonction f est une **courbe de ………………………..**

On cherche la proportion des ménages possédant 80 % du parc.
On résout l'équation … … … … … … … … … … … … … … … … … … ….
……..
……..
Donc …….. des ménages possèdent ……… du parc motorisé.

Exercices

30 ★ **a)** À la calculatrice, calculer les nombres :
exp(2) ; exp(1) ; exp(0,5) ; exp(− 3) ; e^{10} ; e .
b) Calculer e + 3 ; e + ln(2) ; e − ln(15) ; $e^3 - 30$.

32 ★★ **1.** On rappelle que **ln(e^x) = x** pour tout réel x et **exp(ln(x)) = x** pour tout réel strictement positif.
Utiliser ces propriétés pour calculer : ln (e^2) ; exp(ln 3) ; exp(ln 0,9) ; ln($e^{-0,6}$) ; ln(e) + $e^{\ln 2}$.
On pourra vérifier à l'aide de la calculatrice.
2. On sait que l'équation **ln(x) = k**, où k est un réel quelconque, a une seule solution **$x = e^k$**.
Résoudre chaque équation suivante :
a) ln(x) = 1 **b)** ln(x) = 4 **c)** ln(x) = − 0,9
d) 3 × ln(x) = 7 **e)** 0,3 ln(x) − 2 = 0 .
On donnera une valeur arrondie de la solution.
3. On sait que l'équation **$e^x = k$** , avec **k réel strictement positif**, a pour seule solution **x = ln(k)** .
Résoudre chaque équation suivante :
a) $e^x = 1$ **b)** $e^x = 4$ **c)** $e^x = 0,1$
d) $3 \times e^x = 7$ **e)** $0,3\,e^x - 2 = 0$.
On donnera une valeur arrondie de la solution.
f) L'équation $e^x = -1$ a-t-elle une solution ?

33 ★ On sait que l'épargne S est une fonction croissante du taux d'intérêt i affiché sur les marchés financiers.
Dans un pays, on modélise cette épargne, en milliards d'unités monétaires (Mrd UM) , par :

$S(x) = 5\,e^x + 65$, avec $x = 100 \times i$.

Ainsi $x = 5$ pour un taux d'intérêt de $i = 5$ % .
1. a) Calculer S(2,5) . Interpréter le résultat.
b) Calculer le montant de l'épargne dans ce pays si le taux d'intérêt est de 3 % .
2. Si le taux d'intérêt perd un point de pourcentage et passe de 3 % à 2 % , calculer la baisse de l'épargne dans ce pays.
3. Quel doit être le taux d'intérêt pour que l'épargne soit de 400 Mrd UM ?
Pour cela, résoudre l'équation $5\,e^x + 65 = 400$.
Arrondir le résultat à 0,1 près.
On pourra vérifier en visualisant le tableau de valeurs de ▮\Y₁=5e^X+65 .

34 ★★ Suite à la fashion week, la demande pour un accessoire est modélisée par $f(p) = 12 - 0,01\,e^p$ où p est le prix unitaire en euros et $f(p)$ est la quantité demandée en milliers.
1. Visualiser cette fonction à l'aide de la calculatrice, dans la fenêtre X ∈ [0 ; 8] et Y ∈ [−1 ; 13] .
Indiquer le sens de variation de cette fonction.
2. a) Que se passe-t-il si le prix dépasse 7,09 € ?
b) Déterminer le prix si la quantité demandée est de 10 000 pièces. Arrondir le résultat à 0,01 € près.
3. a) En utilisant la calculatrice ou le tableur, compléter le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
1	**Étude de l'élasticité de la demande**				
2		**V1**	**V2**	**Var. absolue**	**Var. relative**
3	**Prix p**	5	5,05		
4	**Quantité q**				

b) On rappelle que **l'élasticité de la demande par rapport au prix** est le quotient :

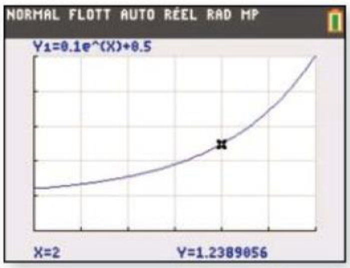
$$\frac{\text{variation relative de la quantité demandée}}{\text{variation relative du prix}} .$$

En utilisant les résultats du tableau, calculer l'élasticité de la demande pour un prix de 5 € .
c) Calculer de même l'élasticité de la demande pour un prix de 6 € qui augmente de 1 % .
d) Comparer les deux élasticités obtenues.

35 ★★ Sur le marché des fruits et primeurs de Paimpol, le prix au kg des artichauts en juillet, proposé par les producteurs, peut être modélisé par la fonction f telle que :

$f(x) = 0,1\,e^x + 0,5$

où la quantité x est en centaines de tonnes (de 100 à 300 tonnes) et le prix $f(x)$ en euros par kg .
Cette fonction est représentée ci-dessous à l'écran d'une calculatrice :



1. Sachant que proposer plus d'artichauts engendre des coûts supplémentaires, en particulier salariaux pour la cueillette, le sens de variation de la fonction d'offre est-il cohérent ?
2. a) Calculer $f(1{,}5)$, arrondi à 10^{-2} .
Interpréter le résultat.

b) Calculer le prix au kg pour une offre de 270 t.

3. Alors que les producteurs offrent 270 tonnes, le prix du marché est de 1,6 € le kg.

a) Résoudre l'équation $0{,}1\,e^x + 0{,}5 = 1{,}6$.
Arrondir le résultat à 0,1 près.

b) En déduire la quantité d'artichauts vendus sur le marché de Paimpol au prix du marché.

c) Quelle est la quantité d'artichauts invendus ?

4. Les producteurs proposent 250 tonnes sur le marché.

a) Calculer le prix au kg pour cette offre.

b) Du fait d'une forte demande, le prix du marché a été de 1,8 € le kg.
Déterminer la quantité que les producteurs auraient dû offrir, arrondie à 0,1 tonne.
En déduire la quantité qui a manqué sur le marché.

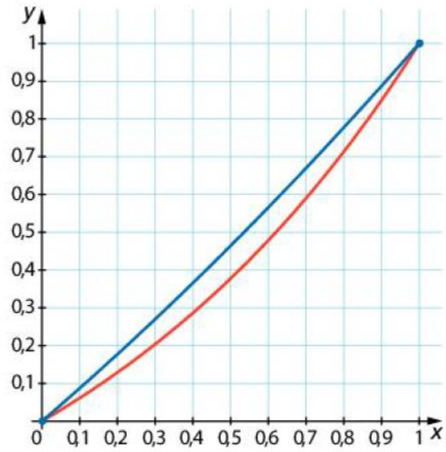
c) Calculer la perte de chiffre d'affaires pour les producteurs au prix de 1,8 € le kg.

36 ★★★ La répartition des salaires d'une entreprise est modélisée par :

$$f(x) = 0{,}582\,e^x - 0{,}582$$

où x est la proportion des salariés de l'entreprise, $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et $f(x)$ représente la proportion correspondante de la masse salariale.

La fonction f est représentée en rouge par la **courbe de Lorenz** ci-dessous :



1. a) Par lecture graphique, indiquer la proportion de la masse salariale que perçoivent les 40 % des salariés les moins bien payés de l'entreprise.
Même question pour les 60 % des salariés les moins bien payés de l'entreprise.

b) Retrouver ces résultats par le calcul.

2. a) Par lecture graphique, indiquer la proportion des salariés les mieux payés de l'entreprise qui se partagent 30 % des plus hauts salaires.

b) Retrouver ce résultat par la résolution d'une équation.