Chapitre 7 – Loi binomiale

I. Schéma de Bernoulli

A. Loi de Bernoulli

Exemple
Mateo est commercial dans la société CHO-FOD. Il vend des systèmes de climatisation.
Il estime que la probabilité qu'un client démarché accepte le devis est de 0,4.
Ainsi à chaque client démarché, soit le devis est accepté avec une probabilité … … … … … … … … … … … … … soit le devis est refusé avec une probabilité … … … … … … … … … … … … … .

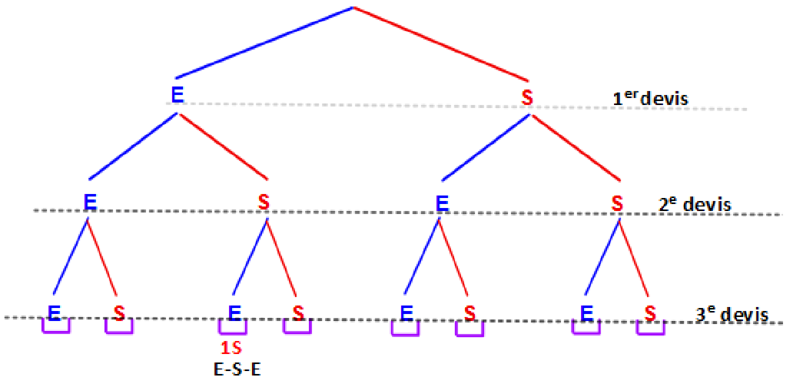
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ………………………………………………..
La probabilité de succès est notée … … … … … … … … … … …

Remarque :
Le succès peut être un événement « ………………………… ».

B. Schéma de Bernoulli

1. Représentation par un arbre

Exemple
Mateo prend au hasard les devis de 3 clients démarchés.
La décision de chacun des clients ne dépend pas de la décision des autres.
Donc Mateo peut considérer que prendre 3 devis constitue la ………………………………………….,
……………………………………………….., de probabilité de succès … … … … … … … … … ….
On peut représenter ce tirage de 3 devis par l'arbre pondéré ci-contre :



On a noté, en bas de chaque chemin, le nombre de ……………………………………………………..
Ainsi Mateo obtient exactement un seul devis accepté sur les 3 pour les listes de résultats :
… ….

2. Variable aléatoire associée au nombre de succès

- La répétition de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, est un …………………… ………………………, représenté par un arbre pondéré à… … … … … … … … … … … …
- La …………………………., associée au nombre de succès dans un schéma de Bernoulli, prend toutes les valeurs entières k allant de ……………… .
- … … … … … … est la probabilité d'obtenir exactement k succès lors de la répétition de n épreuves. $P(X \leq k)$ est la probabilité d'obtenir …………………………….

Exemple
Pour calculer la probabilité de la liste $E - E - S$, on applique le principe multiplicatif :

$$P(E - S - S) = \text{… … … … … … … … … … … … ..}$$

D'après l'arbre, il existe 3 listes qui conduisent à « obtenir un seul devis accepté ».
Donc :

$$P(X=1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La probabilité pour Mateo d'obtenir **au moins un** devis accepté est l'événement contraire de ………………… ………………… devis accepté : $P(\boldsymbol{X \geq 1}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$Or\ P(X=0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc :

$$P(X \geq 1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. Loi binomiale

A. Définition et calcul

La **loi binomiale** est la loi de probabilité de la variable aléatoire X associée au nombre de …………………. ……………………………………………

La **loi binomiale** se note … … … … .. , de paramètres …. et …. , où … … … … … … … … … … … … … … … … … … …. dans le schéma de Bernoulli et … … … … … … … … … … … … .. ..

Dans le cadre de la loi binomiale, une probabilité se calcule à l'aide du tableur ou de la calculatrice.

	A	B	C	D
1	Loi binomiale		n =	p =
2	X = k	P(X = k)	5	0,4
3	0	=LOI.BINOMIALE(A3;C2;D2;FAUX)		
4	1	0,2592		
5	2	0,3456		
6	3	0,2304		
7	4	0,0768		
8	5	0,01024		

Exemples

- Mateo prend au hasard **5 devis**. La variable aléatoire associée au **nombre de devis acceptés** suit la loi binomiales … … … … … . Les valeurs sont obtenues ci-dessus avec le tableur.
  On peut calculer plus directement la probabilité qu'**aucun devis** ne soit accepté, c'est-à-dire que tous les devis soient refusés :

  ….

  Ainsi, la probabilité de l'événement contraire « **au moins un** devis est accepté » est :

  ….

- Mateo prend au hasard **30** devis, indépendamment les uns des autres. La variable aléatoire X , associée au nombre de devis acceptés, suit la loi binomiale … … … … … … …. . Sur calculatrice :

Probabilité	ponctuelle P(X = 5)	cumulée P(X ⩽ 5)	Résultats
Sur TI : distrib 2nde var DISTR	A :binomFdp(binomFdp nbreEssais:30 p:0.4 valeur de x:5 Coller	B :binomFRép(binomFRép nbreEssais:30 p:0.4 valeur de x:5 Coller	NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP binomFdp(30,0.4,5) .0041487223 binomFRép(30,0.4,5) .0056587964

La probabilité que Mateo obtienne **exactement 5 devis** acceptés est … … … … … … … … .. et la probabilité d'obtenir **au plus 5 devis** est … … … … … … … … … … … … .. , arrondies à 10^{-5} près.

B. Espérance, variance et écart type

Pour une loi binomiales $\boldsymbol{\mathcal{B}(n\,;\,p)}$, de paramètres $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{p}$, l'***espérance*** est … … … … … … .. , la variance est … … … … … … … … … … … … … … … … …. et **l'écart type** est la racine carrée de la variance :

… … … … … … … … … … … … … … ….

On admet que, si on effectue un **grand nombre de fois** la répétition de $\boldsymbol{n}$ épreuves de Bernoulli, on peut espérer obtenir $E(X)$ succès en moyenne avec un écart type de σ.

Exemple

Mateo prend au hasard 30 devis : si Mateo renouvelle un grand nombre de fois l'expérience, il peut espérer obtenir $E(X) =$ … … … … … … … … … devis acceptés en moyenne parmi les 30 tirés.
L'écart type sera $\sigma(X) =$ … … … … … … … … … … …