DIVISIBILITÉ ET CONGRUENCES

Partie 1 : Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition : Soit a et b deux entiers relatifs.
a **divise** b s'il existe un ……………… tel que … … … … … … … ….
On dit également :

- a est un **……………** de b,
- b est **………………** par a,
- b est un **……………..** de a.

Notation : a divise b se note : … … … … ..

Exemples :

- 56 est un multiple de –8 car … … … … … … … … … …
- L'ensemble des multiples de 5 sont $\{\ldots ; -15 ; -10 ; -5 ; 0 ; 5 ; 10 ; \ldots\}$. On note cet ensemble … ….
- L'ensemble des diviseurs de 6 sont ……………………………………
- 0 est divisible par ………………………

Rappel : Un nombre pair s'écrit sous la forme ………, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme…………….., avec k entier.

Propriété : Soit a et b deux entiers relatifs avec b non nul.
b divise $a \Leftrightarrow$ … … … … … …. $\Leftrightarrow$ … … … … … … … $\Leftrightarrow$ … … … … … … … ..

Propriété (transitivité) : Soit a, b et c trois entiers relatifs.
Si a divise b et b divise c alors … … … … … … … … ..

Démonstration :…..

Exemple :

- $3|12$ et $12|36$ donc ………
- On peut appliquer également la contraposée de la propriété de transitivité :
  Comme 2 ne divise pas 1001, aucun nombre pair ne divise …………
  En effet, si par exemple 10 divisait 1001 alors 2 diviserait ……….

Méthode : Appliquer la définition de la divisibilité (démonstration par l'absurde)

Démontrer que pour tout entier relatif n, le nombre $6n + 5$ n'est pas divisible par 3.

Propriété (combinaisons linéaires) : Soit a, b et c trois entiers relatifs.
Si c divise a et b alors c divise … … … … … … … … … où m et n sont deux entiers relatifs.

Démonstration :

Exemple :
Soit un entier relatif N qui divise les entiers relatifs n et $n + 1$.
Alors N divise … … … … … … … Donc $N =$ … … … ou $N =$ … … ..

Méthode : Utiliser la propriété des combinaisons linéaires (démonstration avec réciproque)

Déterminer les entiers relatifs n, tels que $2n + 5$ divise $n - 1$.

Partie 2 : Division euclidienne

Propriété – Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$
Soit a un entier relatif et b entier naturel non nul.
On appelle division euclidienne de a par b l'opération qui, au couple $(a\ ,b)$ associe l'unique couple d'entiers relatifs $(q\ ,r)$ tel que :

$$a = bq + r \text{ avec } 0 \leq r < b.$$

a est le **…………..**
b est le **…………**
q est le…………….
r est le **……………..**

Exemple : Dans la division euclidienne de 412 par 15, on a : $412 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Démonstration :

Existence admise
Unicité :

Méthode : Déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne (1)

Déterminer le quotient et le reste de la division de –5000 par 17.

Méthode : Déterminer le quotient et le reste d'une division euclidienne (2)

Déterminer le quotient et le reste de la division de $5n + 11$ par $2n + 3$, avec n entier naturel.

Propriété : Soit un entier naturel b, tel que $b \geq 2$.
Alors, tout entier a s'écrit sous l'une des formes suivantes :

$$bq \text{ ou } bq + 1 \text{ ou } bq + 2 \ldots \text{ ou } bq + (b - 1), \text{ avec } q \text{ entier relatif.}$$

Exemples pour comprendre :
- En effectuant la division de a par 5, on a : $a = 5q + r$, avec $0 \leq r < 5$.
Ainsi, a peut s'écrire : $5q$ ou $5q + 1$ ou $5q + 2$ ou $5q + 3$ ou $5q + 4$.
- De même, a peut s'écrire : $2q$ ou $2q + 1$.
On retrouve ici, la notion de parité d'un nombre : un nombre est soit pair, soit impair.

Méthode : Effectuer une démonstration par disjonction des cas

Démontrer que pour tout entier naturel n, $n(n + 5)(n - 5)$ est divisible par 3.