Partie 3 : Congruences dans $\mathbb{Z}$

1) Définition

Exemple :
On considère la suite de nombres : 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36.
Si on prend deux quelconques de ces nombres, alors leur différence est divisible par 5.
Par exemple : 21 – 6 = 15 qui est divisible par 5.
On dit que 21 et 6 sont congrus modulo 5.

Définition : Soit n un entier naturel ($n \geq 2$).
Deux entiers a et b sont congrus modulo n lorsque … … … … … … … … … … … … … ......
On note … … … … .. …….. ou … … … … … … … ou … … … … … … … … … … … … ..

Propriété : Soit n un entier naturel non nul.
Deux entiers a et b sont congrus modulo n, si et seulement si, la division euclidienne de a par n a le même reste que ………………………………………..

Démonstration : On pose $\begin{cases} a = nq + r \\ b = nq' + r' \end{cases}$ avec $0 \leq r < n$ et $0 \leq r' < n$

- Si $r = r'$:

- Si a et b sont congrus modulo n :

Exemple : On a vu que $21 \equiv 6[5]$.
Les égalités euclidiennes $21 = 4 \times 5 + 1$ et $6 = 1 \times 5 + 1$ montrent que le reste de la division de 21 par 5 est égal au reste de la division de 6 par 5.

Méthode : Écrire avec des congruences
1) Compléter : $13 \equiv \cdots [5]$ $45 \equiv \cdots [3]$ $-8 \equiv \cdots [12]$
2) Démontrer que : $214 \equiv 25[9]$

2) Propriétés sur les congruences

Propriétés : Relation d'équivalence
La congruence est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que pour tout entier a , b , c on a :
a) $a \equiv$ … … (réflexivité)
b) $a \equiv b\ (n) \Rightarrow$ … … … (symétrie)
b) $a \equiv b\ (n)$ et $b \equiv c\ (n) \Rightarrow$ … … .. (transitivité)

Théorème : Multiples
Soit n un entier naturel ($n \geq 2$), a et b deux entiers relatifs :

$$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow \text{… … … … … … … … … ..}$$

Démonstration :
On démontre l'équivalence par double implication.
• $a \equiv b\ (n)$
……..
• Réciproquement, $a - b \equiv 0\ (n)$ ……..

Théorème : Compatibilité
Soit n un entier naturel ($n \geq 2$) et a , b , c , d des entiers relatifs tels que $a \equiv b$ (n) et $c \equiv d$ (n) .
La relation de congruence est compatible avec :
① L'addition : $a + c \equiv b + d$ (n)
② La multiplication : $a \times c \equiv b \times d$ (n)
③ Les puissances $a^k \equiv b^k$ (n) avec $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration de la dernière relation :
- Initialisation :
- Hérédité :

- Conclusion :

Exemples :
On a : $7 \equiv 4[3]$ et $11 \equiv 20[3]$ donc :
$7 + 11 \equiv$ … … ….
$7 \times 11 \equiv$ … … …

Attention la réciproque est fausse :
Si $k \times a \equiv k \times b[n]$, on n'a pas nécessairement … … … … … … ..
En effet, la division n'est pas compatible avec les congruences.
Par exemple :
Si $12 \equiv 18[6]$, mais … … … … … … ..

Méthode : Appliquer les propriétés sur les congruences
Compléter le tableau :

a	$\equiv 1[4]$	$\equiv -1[7]$	$\equiv 1[10]$
b	$\equiv 2[4]$	$\equiv 4[7]$	$\equiv -5[10]$
$a+b$	$\equiv$ … … $[4]$	$\equiv$ … … $[7]$	$\equiv$ … … $[10]$
$a-b$	$\equiv$ … … $[4]$	$\equiv$ … … $[7]$	$\equiv$ … … $[10]$
a^2	$\equiv$ … … $[4]$	$\equiv$ … … $[7]$	$\equiv$ … … $[10]$
$4b$	$\equiv$ … … $[4]$	$\equiv$ … … $[7]$	$\equiv$ … … $[10]$
a^2+4b-6	$\equiv$ … … $[4]$	$\equiv$ … … $[7]$	$\equiv$ … … $[10]$

3) Exemples d'application

Méthode : Résoudre une équation avec des congruences

a) Déterminer les entiers x tels que $6 + x \equiv 5[3]$
b) Déterminer les entiers x tels que $3x \equiv 5[4]$

Méthode : Démontrer une divisibilité à l'aide des congruences

Démontrer que pour tout entier naturel n, $n(n+5)(n-5)$ est divisible par 3.

Méthode : Déterminer le reste d'une division euclidienne à l'aide de congruences
a) Déterminer le reste de la division de 2^{456} par 5.
b) Déterminer le reste de la division de 2^{437} par 7.

Méthode : Montrer la divisibilité (page 87)
Montrer que, pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11

À vous de jouer !

10 En remarquant que $25 \equiv -1$ (13), montrer que pour tout entier naturel n, $5^{4n} - 1$ est divisible par 13.

11 À l'aide des congruences, déterminer le chiffre des unités dans l'écriture décimale de 3^{2021}.

↳ Exercices 62 à 74 p. 93

Méthode : Utiliser un tableau de congruences (page 87)

Déterminer les restes possibles de la division de n^2 par 7 suivant les valeurs de l'entier relatif n.
En déduire les solutions de $n^2 \equiv 2$ (7).

À vous de jouer !

12 Déterminer les restes possibles dans la division de n^2 par 8 suivant les valeurs de l'entier relatifs n.
Résoudre alors l'équation $(n+3)^2 - 1 \equiv 0$ (8).

13 **1.** Déterminer les restes possibles dans la division de $4x$ par 9 suivant les valeurs de l'entier relatifs x.
2. Résoudre alors : $4x \equiv 5$ (9).

↳ Exercices 62 à 74 p. 93

Méthode : Déterminer une série de restes (page 88)

1. Soit n un entier naturel. Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 3^n dans la division par 11.
2. En déduire les valeurs de n pour lesquelles $3^n + 7$ est divisible par 11.
3. En déduire que $135^{2021} \equiv 3$ (11).

À vous de jouer !

14 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 2^n dans la division par 9.
2. En déduire les entiers n tels que $2^n - 1$ est divisible par 9.

15 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 7^n dans la division par 10.
2. En déduire les entiers n tels que $7^n - 1$ est divisible par 10.
3. En déduire le chiffre des unités de 7^{98}.

16 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 5^n dans la division par 9.
2. En déduire les entiers n tels que $5^n - 1$ est divisible par 9.
3. En déduire que $212^{2020} \equiv 4$ (9).

17 **1.** Déterminer, suivant les valeurs de n, les restes possibles de 3^n dans la division par 7.
2. En déduire les entiers n tels que $3^n - 6$ est divisible par 7.
3. En déduire que $164^{2021} \equiv 5$ (7).

↳ Exercices 75 à 79 p. 94