Exercice 1 - Utiliser la forme algébrique

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z = i - 2$.

$z = i - 2 = (-2) + 1 \times i$ donc $Re(z) = -2$ et $Im(z) = 1$

2. Soit x et y deux réels.
Pour quelles valeurs de x et de y a-t-on $(x + 2y) + i(x - 2y + 3) = 2 + i$?

$$(x + 2y) + i(x - 2y + 3) = 2 + i \iff \begin{cases} x + 2y & = 2 \\ x - 2y + 3 & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y & = 2 \\ x - 2y & = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 - Calculer dans $\mathbb{C}$

On considère les deux nombres complexes $z = 4 + 7i$ et $z' = -2 + 5i$

Déterminer la forme algébrique de :

$z - z' = 4 + 7i - (-2 + 5i) = 4 + 7i + 2 - 5i = 6 + 2i$	$z \times z' = (4 + 7i)(-2 + 5i) = -8 + 20i - 14i - 35 = -43 + 6i$
$\frac{1}{z'} = \frac{1}{-2 + 5i} = \frac{1 \times (-2 - 5i)}{(-2)^2 + (5)^2} = -\frac{2}{29} - \frac{5}{29}i$	$\frac{z}{z'} = (4 + 7i) \times \left(\frac{-2 - 5i}{29}\right) = \frac{-9 - 20i - 14i + 35}{29} = \frac{27}{29} - \frac{34}{29}i$

Exercice 3 - Utiliser le conjugué d'un nombre complexe

1. On considère le nombre complexe $z_1 = i - 2$.

Déterminer la forme algébrique du conjugué de z_1.

$$\overline{z_1} = \overline{-2 + i} = -2 - i$$

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z - \bar{z} + i$.

Démontrer que Z est un nombre imaginaire pur.

$$\bar{Z} = \overline{z - \bar{z} + i} = \bar{z} - \bar{\bar{z}} + \bar{i} = \bar{z} - z - i = -(z - \bar{z} + i) = -Z$$

Donc Z est un nombre imaginaire pur.

3. On considère le nombre complexe $z' = \frac{11+i}{1-2i}$

a) Déterminer la forme algébrique de z'.

$$z' = \frac{(11 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{11 + 22i + i - 2}{1^2 - (2i)^2} = \frac{9 + 23i}{5} = \frac{9}{5} + \frac{23}{5}i$$

b) En déduire sans calcul la valeur de $\frac{11+i}{1-2i} + \frac{11-i}{1+2i}$ et celle de $\frac{11+i}{1-2i} - \frac{11-i}{1+2i}$.

$$\frac{11 + i}{1 - 2i} + \frac{11 - i}{1 + 2i} = z' + \overline{z'} = \frac{9}{5} + \frac{23}{5}i + \frac{9}{5} - \frac{23}{5}i = \frac{18}{5}$$

$$\frac{11 + i}{1 - 2i} - \frac{11 - i}{1 + 2i} = z' - \overline{z'} = \frac{9}{5} + \frac{23}{5}i - \frac{9}{5} + \frac{23}{5}i = \frac{46}{5}i$$

Exercice 4 - Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donner les solutions sous forme algébrique.

a) $(1-2i)z = 3+i$

$$(1-2i)z = 3+i \iff z = \frac{3+i}{1-2i} \iff z = \frac{(3+i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{1+7i}{5} = \frac{1}{5}+\frac{7}{5}i$$

$$\boldsymbol{S = \left\{\frac{1}{5}+\frac{7}{5}i\right\}}$$

b) $z + 2\bar{z} - 4 = i$

$$z+2\bar{z}-4 = i \iff (a+bi)+2(a-bi)-4-i = 0 \iff (3a-4)+(-b-1)i = 0$$

$$\iff \begin{cases} 3a-4=0 \\ -b-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{4}{3} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{4}{3} - i\right\}$$

c) $2z^2 - 3z + 10 = 0$

$$a = 2 \ , \ b = -3 \ , \ c = 10 \quad donc \ \Delta = (-3)^2 - 4\times 2\times 10 = 9 - 80 = -71 < 0$$

L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées.

$$\boldsymbol{S = \left\{\frac{3 - i\sqrt{71}}{4} ; \frac{3+i\sqrt{71}}{4}\right\}}$$

Exercice 5 – Factorisation de polynômes

Factoriser les polynômes suivants.

a) $x^4 - 1$

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x+i)(x-i)$$

b) $x^3 - 8$

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4) = (x-2)\left(x+1-i\sqrt{3}\right)\left(x+1+i\sqrt{3}\right)$$

Exercice 6 – Equation de degré 3

On considère l'équation suivante :

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = 0$$

a) Vérifier que -1 est solution de l'équation.

$$(-1)^3 - 3(-1)^2 + 25(-1) + 29 = 0$$

Donc – 1 est solution de l'équation.

b) Déterminer une factorisation de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$.

$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = (x+1)(x^2 - 4x + 29)$$

c) En déduire toutes les solutions complexes de l'équation.

$$S = \{-1 ; 2 - 5i ; 2 + 5i\}$$