

Mathématiques Expertes
Évaluation du 22 novembre 2020 (1h)

Exercice 1

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 2-x \\ 2x+3 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle valeur de x la matrice X est-elle égale à sa transposée ?

Exercice 2

Ecrire la matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$ correspondante.

$$n = 3 \text{ et } p = 2 ; a_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } j \text{ est pair} \\ j & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Vérifier par le calcul que $A(A - 3I_2) = I_2$
- 2) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 4

On donne $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer la matrice M^2 à l'aide de la calculatrice.

On admet que $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

- 2) Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.
- 3) En déduire que la matrice M est inversible et que :

$$M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$$

Exercice 5

(S) est le système $\begin{cases} -y + 2x = 7 - z \\ -x + z = 4 - 2y \\ x + z = 2y \end{cases}$

- 1) Écrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = B$, où A, X et B sont des matrices que l'on précisera.
- 2) Déterminer la matrice inverse de A à l'aide de la calculatrice, puis résoudre le système (S).

Exercice 6

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que P est inversible et donner à l'aide de la calculatrice, la matrice inverse P^{-1} de P , puis vérifier que $M = PDP^{-1}$

- 2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

- 3) On admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

En déduire alors M^n en fonction de n .