Mathématiques Expertes
Évaluation du 22 novembre 2022 (1h30)

Exercice 1

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 & 2-x \\ 2x+3 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour quelle valeur de x la matrice X est-elle égale à sa transposée ?

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 2x+3 \\ 2-x & 3 \end{pmatrix} \ donc \ X^T = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x & = & 2x+3 \\ 2x+3 & = & 2-x \end{cases} \Leftrightarrow 2x+3 = 2-x \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Exercice 2

Ecrire la matrice $A = (a_{ij})$ de dimension $n \times p$ correspondante.

$$n = 3 \ et \ \ p = 2 \ ; \ a_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } j \text{ est pair} \\ \quad j \text{ sinon} \end{cases}$$

A est une matrice 3 lignes et 2 colonnes.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier par le calcul que $A(A - 3I_2) = I_2$

$$A(A-3I_2) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

2) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Il existe donc une matrice B telle que $A \times B = I_2$ donc A est inversible et $B = A^{-1} = A - 3I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 4

On donne $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer la matrice M^2 à l'aide de la calculatrice.

On admet que $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2) Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

$$M^2 + 8M + 6I = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 7 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

3) En déduire que la matrice M est inversible et que : $M^{-1} = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$

$$M^3 = M^2 + 8M + 6I \Leftrightarrow M^3 - M^2 - 8M = 6I \Leftrightarrow M(M^2 - M - 8I) = 6I$$

$$\Leftrightarrow \ M \times \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I) = I$$

Ceci prouve qu'il existe une matrice A telle que $M \times A = I$ donc M est inversible et

$$M^{-1} = A = \frac{1}{6}(M^2 - M - 8I)$$

Exercice 5

(S) est le système $\begin{cases} -y+2x=7-z \\ -x+z=4-2y \\ x+z=2y \end{cases}$

1) Écrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = B$, où A, X et Bsont des matrices que l'on précisera.

$$\begin{cases} -y+2x=7-z \\ -x+z=4-2y \\ x+z=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y+z=7 \\ -x+2y+z=4 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Déterminer la matrice inverse de A à l'aide de la calculatrice, puis résoudre le système (S).

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6

$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrer que P est inversible et donner à l'aide de la calculatrice, la matrice inverse P^{-1} de P, puis vérifier que $M = PDP^{-1}$.

$$\det(P) = (-1) \times (-3) - 1 \times 1 = 2 \neq 0 \text{ donc } P \text{ est inversible.}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = M$$

2) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $M^1 = M$ et $PD^1P^{-1} = PDP^{-1} = M$ donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : On suppose que pour n fixé, $M^n = PD^nP^{-1}$, montrons que $M^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$M^n = PD^nP^{-1} \Leftrightarrow M \times M^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}D^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Conclusion : Pour tout entier $n \geq 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$

3) On admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.
En déduire alors M^n en fonction de n.

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3^n \\ 1 & -3^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-3^n & 1-3^n \\ -3+3^{n+1} & -1+3^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{3-3^n}{2} & \dfrac{1-3^n}{2} \\ \dfrac{-3+3^{n+1}}{2} & \dfrac{-1+3^{n+1}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$