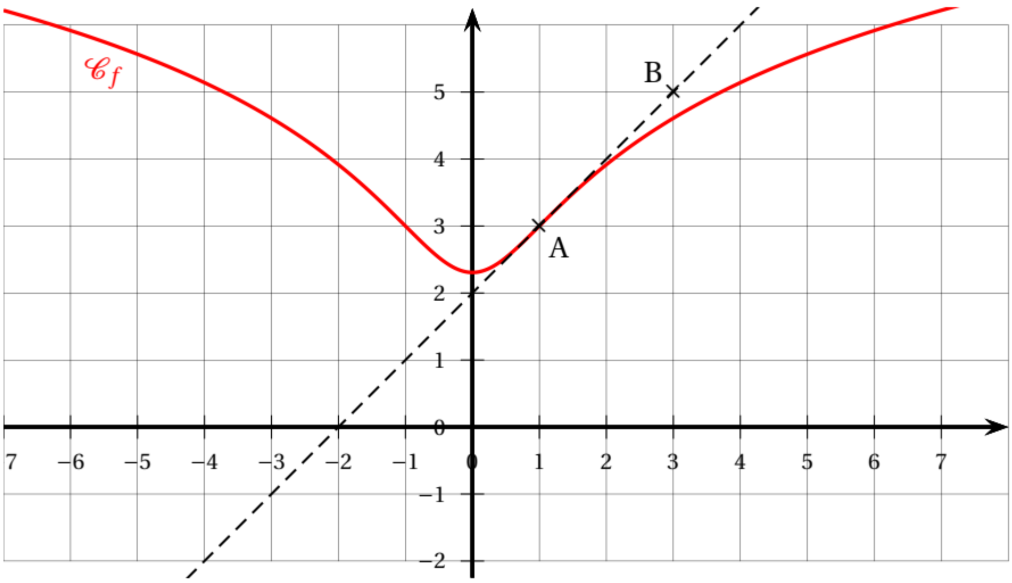
Évaluation n°2 - 31 janvier 2023 (2h00)

## *Exercice 1* *(9 points) Asie Mai 2022 S1*

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5).
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.




*Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.*

**Partie A**

***1.*** Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

***2.*** La fonction $f$ est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels positifs.
(a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
(b) Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ à l'aide des résultats précédents.

**Partie B**

On admet que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

***1.*** Montrer que $f$ est une fonction paire.

***2.*** Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

***3.*** Déterminer l'expression de $f'(x)$.
Étudier le sens de variation de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$.
Dresser le tableau des variations de $f$ en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$.

***4.*** À l'aide du tableau des variations de $f$, donner les valeurs du réel $k$ pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

***5.*** Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

## Exercice 2 (9 points) Am du Sud Sept 2022 S2

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction $f$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$ ,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$$

**PARTIE A: Étude d'une fonction auxiliaire $g$**

Soit $g$ la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x)$$

On note $g'$ la fonction dérivée de $g$. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

***1.*** Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.

***2.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ en justifiant votre démarche.

***3.*** Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de $g$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

***4.*** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\,;\,+\infty[$ : 1 et $\alpha$ avec $\alpha$ appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
On donnera un encadrement de $\alpha$ à 0,01 près.

***5.*** En déduire le tableau de signes de $g$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

**PARTIE B : Étude de la fonction $f$**

On considère dans cette partie la fonction $f$, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note $f'$ la fonction dérivée de $f$.
La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction $f$ est donnée dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.

***1.*** Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ en justifiant votre démarche.

***2.*** (a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.
(b) En déduire le tableau des variations de $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$.

***3.*** **<u>Question BONUS</u>** :
Montrer que $f(\alpha) = \alpha - 2 + \dfrac{4}{\alpha}$

## Exercice 3 QCM (2 points)

***1.*** Le réel $a$ est définie par $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a)* $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$ | *b)* $\frac{1}{2}\ln(3)$ | *c)* $3\ln(3) + \frac{1}{2}$ | *d)* $-\frac{1}{2}\ln(3)$ |

***2.*** On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.
Pour tout réel $x$ de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a)* $f'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$ | *b)* $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ | *c)* $f'(x) = \ln(2x+1)$ | *d)* $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ |