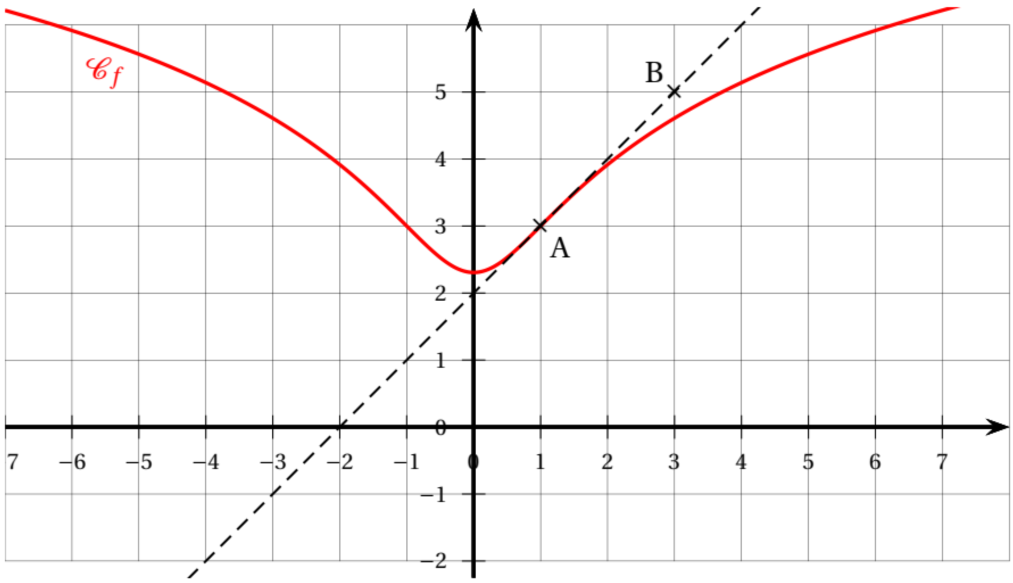
Évaluation n°2 - 31 janvier 2023 (2h00)

Exercice 1 (9 points) Asie Mai 2022 S1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5).
On donne ci-dessous $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).

2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln(ax^2 + 1) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.

(a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.

Comme $a \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0$, on a $ax^2 \geqslant 0$, donc $ax^2 + 1 \geqslant 1 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2+1}$.

(b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Les résultats du 1. peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \dfrac{2a}{a+1} = 1 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $2a = a + 1 \Leftrightarrow a = 1$ et en reportant dans la première :
$\ln(1+1) + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - \ln 2$.
On a donc sur $\mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

1. Montrer que f est une fonction paire.

Quel que soit le réel x, $f(-x) = \ln[(-x)^2 + 1] + 3 - \ln 2 = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = f(x)$.
La fonction f est donc paire (la représentation graphique de f est donc symétrique autour de l'axe des ordonnées).

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et par composition $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
La fonction étant paire $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

Comme $x^2 + 1 > 0$ quel que soit le réel x, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Le dénominateur étant supérieur à zéro le signe de $f('x)$ est donc celui de $2x$, donc :
$f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Conclusion f est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Le nombre $f(0) = \ln 1 + 3 - \ln = 3 - \ln 2$ est donc le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3 - \ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.

D'après le tableau de variations l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions si $k > 3 - \ln 2$.

5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

$f(x) = 3 + \ln 2$
$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2)$
$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = 2\ln(2)$
$\Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = \ln 4$
$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 4$ (par croissance de la fonction logarithme)
soit $x^2 = 3$, d'où deux solutions $S = \{-\sqrt{3}\,;\ \sqrt{3}\}$.

Exercice 2 (9 points) Am du Sud Sept 2022 S2

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par :

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x)$$

PARTIE A: Étude d'une fonction auxiliaire g

Soit g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 2(x-1) - x\ln(x)$$

On note g' la fonction dérivée de g. On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

1. Calculer $g(1)$ et $g(\mathrm{e})$.

- $g(1) = 2 \times 0 - 1 \times 0 = 0$;
- $g(\mathrm{e}) = 2 \times (\mathrm{e} - 1) - \mathrm{e} \times \ln\mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 - \mathrm{e}\ln\mathrm{e} = 2\mathrm{e} - 2 - \mathrm{e} = \mathrm{e} - 2$.

2. Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)$ en justifiant votre démarche.

On sait que $\lim\limits_{x\to0^+} (x\ln x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 2(x-1) = -2$ donc, par somme, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -2$.

3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $g'(x) = 1 - \ln(x)$.
En déduire le tableau des variations de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

g est une somme de produits de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
$g'(x) = 2 \times 1 - \ln x - x \times \frac{1}{x} = 2 - \ln x - 1 = 1 - \ln x$.
Étude du signe de la dérivée : $g'(x) = 1 - \ln x$:

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff \ln\mathrm{e} > \ln x \iff \mathrm{e} > x$, donc g est croissante sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$;
- $1 - \ln x < 0 \iff 1 = \ln x \iff \ln\mathrm{e} = \ln x \iff \mathrm{e} = x$, donc g est décroissante sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$;
- $1 - \ln x = 0 \iff 1 < \ln x \iff \ln\mathrm{e} < \ln x \iff \mathrm{e} < x$, donc $g(\mathrm{e}) = \mathrm{e} - 2$ est le maximum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

D'où le tableau de variations de g :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	-2	$\nearrow$	$\approx 0,718$	$\searrow$	$-\infty$

4. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions distinctes sur $]0\,;\,+\infty[$: 1 et α avec α appartenant à l'intervalle $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
On donnera un encadrement de α à 0,01 près.

• Sur l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, la fonction g est dérivable, donc continue ; comme $-2 < 0 < \mathrm{e}$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un réel unique β de l'intervalle $]0\,;\,\mathrm{e}[$, tel que $g(\beta) = 0$.
Or de façon évidente $g(1) = 0$, donc $\beta = 1$;
• Sur l'intervalle $]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, la fonction g est dérivable, donc continue ; comme $0,718 > 0$, il existe un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$, avec $\alpha \in]\mathrm{e}\,;\,+\infty[$.
On a $g(4,9) \approx 0,01$ et $g(5,0) \approx -0,05$, donc $4,9 < \alpha < 5,0$;
$g(4,92) \approx 0,0009$ et $g(4,93) \approx -0,005$, donc $4,92 < \alpha < 4,93$.

5. En déduire le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$.

D'après la question précédente on peut dresser le tableau de signes de g sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		α		$+\infty$
g		$-$	0	$+$	0	$-$	

PARTIE B : Étude de la fonction f

On considère dans cette partie la fonction f, définie sur $]0\,;\,+\infty[$,par

$$f(x) = 3x - x\ln(x) - 2\ln(x).$$

On note f' la fonction dérivée de f.

La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de cette fonction f est donnée dans le repère $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\,)$ ci-dessous. On admet que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ en justifiant votre démarche.

On a : $f(x) = x\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right]$;

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right) = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\ln x) = -\infty$, donc par somme de limites

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right) = -\infty$, et donc par somme de limites :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[3 - \ln x - 2\dfrac{\ln x}{x}\right] = -\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, par produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. (a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction f somme de produits de fonctions dérivables sur cet intervalle est dérivable et :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3 - \ln x - x \times \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x}\\
&= 3 - \ln x - 1 - \frac{2}{x}\\
&= 2 - \ln x - \frac{2}{x}\\
&= \frac{2x - x\ln x - 2}{x}\\
&= \frac{2(x-1) - x\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}
\end{aligned}$$

(b) En déduire le tableau des variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $g(x)$ étudié à la question 5. de la partie A.

Donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,\alpha]$: f est croissante sur cet intervalle ;

$f'(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ et sur $]\alpha\,;\,+\infty[$: f est décroissante sur ces deux intervalles : $(f(\alpha) \approx 3{,}75)$

x	0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$		
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\approx 3,73$	$\searrow$	$-\infty$

3. **Question BONUS** :

Montrer que $f(\alpha) = \alpha - 2 + \dfrac{4}{\alpha}$

D'après la question *A.4*, $g(\alpha) = 0$ donc

$$\begin{array}{rrcl} & 2(\alpha - 1) - \alpha\ln(\alpha) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \alpha\ln(\alpha) & = & 2(\alpha - 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha) & = & 3\alpha - \alpha\ln(\alpha) - 2\ln(\alpha) \\ & = & 3\alpha - 2(\alpha - 1) - 2 \times \dfrac{2(\alpha - 1)}{\alpha} \\ & = & \alpha + 2 - \dfrac{4\alpha}{\alpha} + \dfrac{4}{\alpha} \\ & = & \alpha - 2 + \dfrac{4}{\alpha} \end{array}$$

Exercice 3 QCM (2 points)

1. Le réel a est définie par $a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$ est égal à :

a) $1 - \frac{1}{2}\ln(3)$	*b*) $\frac{1}{2}\ln(3)$	*c*) $3\ln(3) + \frac{1}{2}$	***d*)** $\boldsymbol{-\frac{1}{2}\ln(3)}$

$$a = \ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{9}\right) = \ln 3^2 + \ln\sqrt{3} - \ln 3 - \ln 9 = 2\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 - \ln 3 - 2\ln 3 = -\frac{1}{2}\ln 3$$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.
Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a :

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2x+1}$	*b*) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$	*c*) $f'(x) = \ln(2x+1)$	***d*)** $\boldsymbol{f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}}$

Posons $u(x) = x^2 + x + 1$ et dans ce cas $f(x) = \ln u(x)$.

On sait que $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.