Produit scalaire dans l’espace et applications

1. Produit scalaire dans l’espace

Remarque :

Deux vecteurs et de l’espace sont nécessairement ………………… :

* s’ils sont ………………, alors il existe une infinité de plans contenant et ;
* s’ils ………………………., ramenons-les à une même origine et considérons le plan engendré par , et qui contient donc, par construction, les vecteurs et .

**Définition**

Le produit scalaire de deux vecteurs et dans l’espace est leur produit scalaire dans un plan les contenant.

Remarque :

La définition donnée et les propriétés établies en classe de Première S dans le plan sont donc aussi valables dans l’espace. À savoir :

* , lorsque et .
* ou ……………. ou .

Dans ce cas, on dit que les vecteurs sont ……………………..

* où est ……………………………………………………..
* et
* où , et sont trois points distincts du plan.

**Propriété - Orthogonalité**

Deux droites sont orthogonales si et seulement si ……………………….………………………..

**Définition - Repère orthonormé**

Un repère de l’espace est dit orthonormé si ……………………….……………………….……

……………………….……………………….……………………….……………………….………………

**Propriété - Expression analytique du produit scalaire**

Dans l’espace muni d’un repère orthonormé, on considère deux vecteurs et .

Alors et

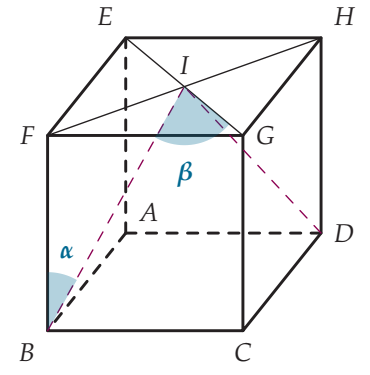
**Exemple :**

Dans un repère orthonormé, soient et deux droites de représentations paramétriques

et .

**Méthode n°1 - Calculer la mesure d’un angle**

Pour calculer un angle géométrique formé par deux vecteurs et , on exprime de deux façons différentes : l’une permettant d’obtenir la valeur du produit scalaire, l’autre faisant intervenir l’angle.

Exercice d’application

Soit , un cube de côté 1 et le centre de la face .

On se place dans le repère orthonormé .

Déterminer, au degré près, les mesures des angles : et

**Propriété - Propriétés algébriques**

|  |
| --- |
| Soient , et trois vecteurs et un réel. Alors :   * ………………………. * ………………………. * …………………… et * ………………………. |

Remarque :

Seul le premier point requiert réellement une démonstration. En effet, ce produit scalaire fait intervenir trois vecteurs et ne peut donc pas, dans le cas général, être considéré dans un seul et même plan.

**PREUVE**

…

**Exemple :**

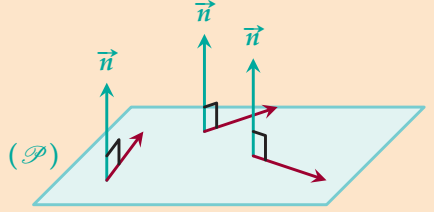
On se place dans le cube comme décrit dans la méthode précédente.

……………………….……………………….……………………….……………………….

Comme et que , on en déduit que .

1. Vecteur normal à un plan

**Définition - Vecteur normal**

Un vecteur est dit normal à un plan s’il est non nul et ……………….

……………………….……………………….……………………….

**Propriété**

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si ……………………

……………………….……………………….………………………..

**PREUVE**

…

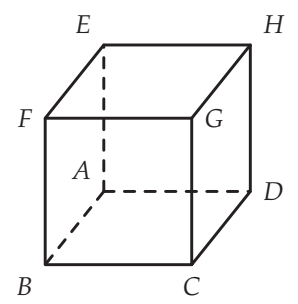
**Propriété**

Si un vecteur est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires d’un plan alors c’est un ……………………

……………………….………………………..

**PREUVE**

…

**Exemple 1**

Soit un cube d’arête .

Les faces et étant des carrés, le vecteur est …………………… aux vecteurs ……………………….sont deux vecteurs non colinéaires du plan .

Ainsi, est un vecteur ………………… au plan . On peut aussi dire que la droite est ……………………….……………………….

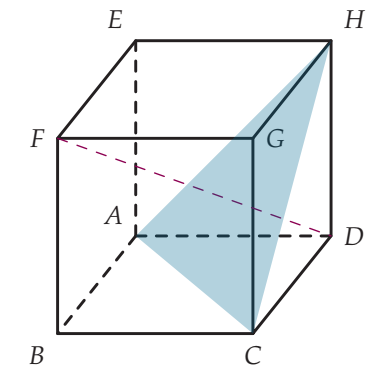
**Exemple 2**

Dans l’espace muni d’un repère orthonormé , on considère les points et ainsi que les vecteurs et .

et ne sont pas colinéaires donc on peut définir le plan engendré par , et .

De plus, est orthogonal à et donc est un vecteur normal au plan .

**Méthode n°2 - Démontrer une orthogonalité**



Exercice d’application

Soit , un cube d’arête 1.

Démontrons que la droite est orthogonale au plan .

**Propriété**

Soit un vecteur normal à un plan .

Alors, tout vecteur non nul colinéaire à est aussi ……………………….……………………….

**PREUVE**

…

Remarque :

La projection orthogonale d’un point sur un plan est le point appartenant à tel que soit orthogonale à ou, autrement dit, que soit un vecteur normal à .

**Exemple 3**

En reprenant la configuration de la méthode précédente, considérons le centre de gravité de .

Alors , où est le milieu de , donc .

Ainsi .

est donc aussi un vecteur normal à et comme , on en déduit que est le projeté orthogonal de sur .

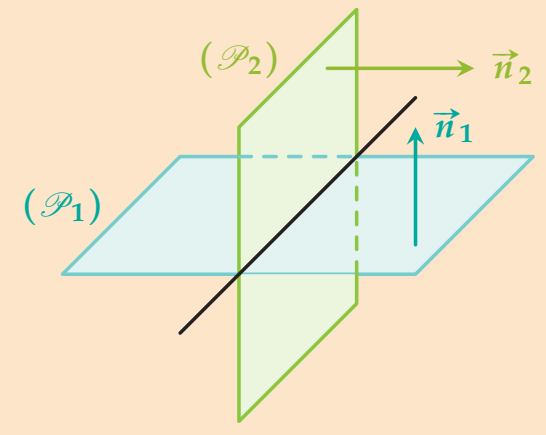
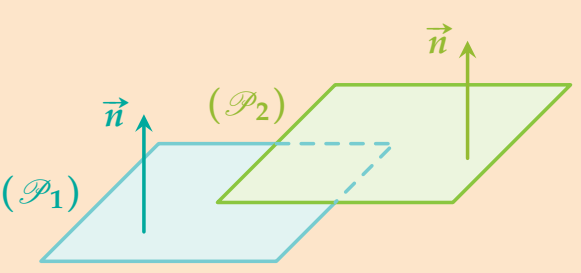
**Propriété - Parallélisme et perpendicularité**

* Deux plans sont parallèles si et seulement si ……………………….……………………….………

………………………..

* Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si ……………………….……………………….

……………………….………………………..



**PREUVE**

Pour le premier point, voir exercice 72 page 320

**Exemple**

On se place dans l’espace muni d’un repère orthonormé.

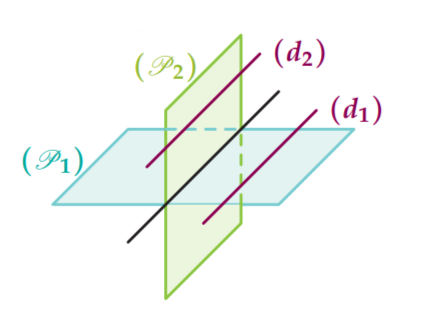
* Soient et deux plans de vecteurs normaux respectifs et .

et ……………………….: les plans et ……………………….

* Soient et deux plans de vecteurs normaux respectifs et .

et ……………………….: les plans et sont ……………………….,

mais ……………………….donc et ……………………….………………………..



Remarque :

Soient et , deux plans perpendiculaires.

Si est une droite de et est une droite de , alors et ne sont pas nécessairement orthogonales.

Ci-contre, deux droites et parallèles.

Voir exercice 31 page 315

**Propriété**

Soient un vecteur non nul, un point et le plan passant par et de vecteur normal .

Alors un point appartient à si et seulement si ……………………….

**PREUVE**

…

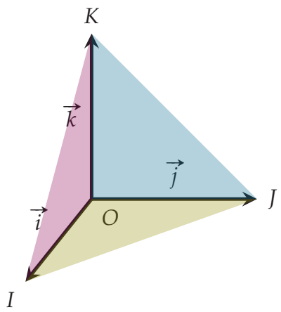
1. Équation cartésienne d’un plan

**Propriété - Caractérisation algébrique d’un plan**

|  |
| --- |
| Soit un point de l’espace muni d’un repère orthonormé .   * Si appartient à un plan , alors ses coordonnées vérifient une relation du type :   ……………………….……………………….avec , et des réels non simultanément nuls.   * Réciproquement :   L’ensemble des points de l’espace vérifiant une relation du type ……………………….  ……………………….………………………. est un plan, que l’on note .  On dit que a pour équation ………………………., appelée équation ………………………. du plan et de plus, est ………………………. |

**PREUVE**

…

**Exemple**

On munit l’espace d’un repère orthonormé .

* Le plan a pour équation et admet pour vecteur normal le vecteur ...
* Le plan a pour équation et admet pour vecteur normal le vecteur ...
* Le plan a pour équation et admet pour vecteur normal le vecteur …

**Méthode n°3 - Déterminer une équation cartésienne d’un plan (cas particulier) Exo 37 page 316**

|  |
| --- |
| Dans le cas où le plan est défini par un point et un vecteur normal :   1. écrire l’équation de sous la forme où le réel reste à déterminer ; 2. déterminer en utilisant les coordonnées du point . |

Exercice d’application

Dans l’espace muni d’un repère orthonormé , déterminer une équation cartésienne du plan passant par et de vecteur normal .

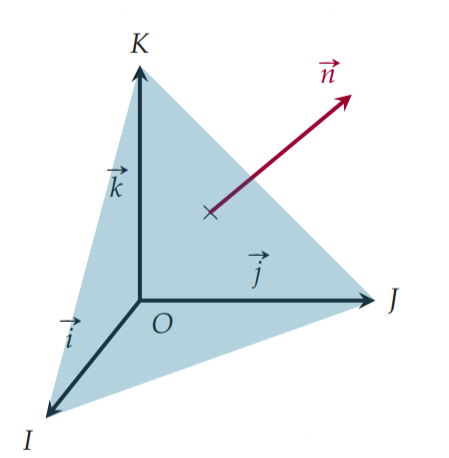
**Méthode n°4 - Déterminer une équation cartésienne d’un plan (cas général) Exo 46 page 316**

|  |
| --- |
| Dans le cas où l’on donne trois points , et pour définir un plan :   1. s’assurer que le plan est bien défini en montrant que , et ne sont pas alignés ; 2. déterminer les coordonnées d’un vecteur normal à ; 3. en déduire une équation cartésienne de en se référant à la méthode précédente. |

Exercice d’application

Dans l’espace muni d’un repère orthonormé , , on considère les points , et .

Déterminer, s’il existe, une équation cartésienne du plan défini par ces trois points.



**Exemple**

On munit l’espace d’un repère orthonormé .

Dans ce repère on considère les points , et . Le plan a pour équation et admet pour vecteur normal .

**Méthode n°5 – Déterminer, si elle existe, l’intersection d’une droite et d’un plan (Ex 52 page 318)**

|  |
| --- |
| Soient une droite dirigée par et un plan de vecteur normal .   1. Tester le parallélisme de et en calculant :   (a) si , alors est parallèle, strictement ou non, à ;  (b) si , alors et se coupent en un point .   1. Si l’intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant et afin de calculer les coordonnées de . |

Exercice d’application

Dans l’espace muni d’un repère orthonormé , on considère la droite de représentation paramétrique et le plan d’équation cartésienne .

Déterminer, s’il existe, les coordonnées du point d’intersection de et de .

Exercice d’application

Même consigne avec la droite et le plan .

**Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l’intersection de deux plans (Ex 66 page 319)**

|  |
| --- |
| Soient et deux plans de vecteurs normaux respectifs et .   1. Tester le parallélisme de et en testant la colinéarité de et . 2. Si les plans ne sont pas parallèles :   (a) écrire le système composé des équations décrivant et ;  (b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;  (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d’intersection. |

Exercice d’application

Dans l’espace muni d’un repère orthonormé , on considère les plans et d’équations respectives et .

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d’intersection entre et .

Exercice d’application

Même consigne avec les plans et d’équations respectives et .