Exercices vers le supérieur

123 Le numéro INSEE ou de sécurité sociale

Algo

Le numéro de sécurité sociale est une succession de 13 chiffres suivie d'une clé de 2 chiffres. Par exemple 2 84 07 17 300 941 clé 46.

On pose alors A le nombre composé des 13 chiffres et K la clé de contrôle constitué par les deux derniers chiffres.
Dans notre l'exemple, on a donc :
$A = 2\ 84\ 07\ 17\ 300\ 941$ et $K = 46$.
Soit r le reste de la division de A par 97.
La clé de contrôle est alors $K = 97 - r$.
Pour rendre exécutable le calcul sur une calculatrice, on décompose A en deux séries de nombres. B correspond au 7 premiers chiffres en partant de la gauche et C aux six derniers.
On a alors : $A = 10^6 \times B + C$.

1. Démontrer que : $A \equiv 27B + C\ (97)$.

2. Vérifier alors que la clé de l'exemple est 46.

3. Écrire une fonction `cle(B,C)` en **Python** qui permet, en rentrant B et C, de calculer la clé K.
Rentrer cette fonction sur la calculatrice.
Tester en cherchant la clé du numéro de sécurité sociale suivant : 1 62 06 74 086 017.

4. Montrer que si dans le nombre complet en incluant la clé (15 chiffres), un et un seul chiffre est erroné, l'erreur est détectée, et qu'il en est de même si deux chiffres consécutifs sont permutés.

124 Écriture décimale et divisibilité

Démo

On considère la suite (u_n) définie par :
$$u_0 = 1 \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 10u_n + 21.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a) Démontrer par récurrence que :
$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ 3u_n = 10^{n+1} - 7$$
b) En déduire l'écriture décimale de u_n.

3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

4. a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$3u_n \equiv 4 - (-1)^n\ (11).$$
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n n'est pas divisible par 11.

5. a) Démontrer l'égalité : $10^{16} \equiv 1\ (17)$.
b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, u_{16k+8} est divisible par 17.

125 Carré parfait

Montrer, sans utiliser de calculatrice et à l'aide des congruences, que 1 295 377 n'est pas un carré parfait.

126 Système de congruences

On considère le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 2\ (3) \\ n \equiv 1\ (5) \end{cases}$

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $(n - 11)$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où $k \in \mathbb{Z}$.

127 Base 12 et divisibilité

On note 0, 1, 2 , … , 9, α, β, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base12. Par exemple :
$$\begin{aligned} \overline{\beta\alpha7}^{12} &= \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7 \\ &= 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 \\ &= 1711 \text{ en base } 10 \end{aligned}$$

1. a) Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 par $N_1 = \overline{\beta1\alpha}^{12}$.
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
b) Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 par :
$N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.
Dans la suite, un entier N s'écrira en base 12 par :
$N = \overline{a_n\ \ldots\ a_1\ a_0}^{12}$.

2. a) Démontrer que $N \equiv a_0\ (3)$.
En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.
Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a) Démontrer que :
$$N \equiv a_n + \ldots + a_1 + a_0\ \ (11).$$
En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre en base 12.
b) À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.
Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x\,4\,y}^{12}$.
Déterminer les valeurs de x et y pour lesquelles N est divisible par 33. Déterminer alors les nombres N possibles avec leurs écritures en base 10.

128 Division euclidienne

Calculer le reste des divisions suivantes :
a) $3^{2\,089}$ par 25
b) $55^{234\,567}$ par 7
c) $4321^{1\,234} + 1234^{4\,321}$ par 7

129 Divisibilité

Démo

Soit $a \in \mathbb{N}$, montrer que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a + 1)^{n+1} - a(n + 1) - 1$ est multiple de a^2.
On pourra raisonner par récurrence.

9782210114081_INT_001_256-EXP.indb 100 10/06/2020 08:19

130 Résolution d'équation (1)
On considère l'équation (E) : $17x^2 - 31y^2 = 22$ où x et y sont des entiers relatifs.
En utilisant les congruences modulo 8, montrer que l'équation (E) n'a pas de solution.

131 Résolution d'équation (2)
On veut résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}$:
$$x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \ (12).$$
1. Déterminer la forme canonique de :
$$x^2 - 4x + 3.$$
2. Compléter le tableau suivant.

$t^1 \equiv \ldots (12)$	0	1	2	3	4	5	6
$t^2 \equiv \ldots (12)$							

3. En déduire les solutions de $t^2 \equiv 1 \ (12)$.
4. Conclure.

132 Équations
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes.
a) $6x \equiv 3 \ (4)$
b) $3x \equiv 4 \ (7)$
c) $4x \equiv 10 \ (26)$
d) $2x \equiv 5 \ (11)$

133 Systèmes
Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x \equiv 3 \, (5) \\ x \equiv 1 \, (6) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x \equiv 3 \, (4) \\ 4x \equiv 1 \, (3) \end{cases}$

134 Équation du second degré
On admet qu'un nombre premier p divise le produit ab si, et seulement si, p divise a ou b.
Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x^2 - 2x + 2 \equiv 0 \ (17)$.

135 Divisibilité
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$:
a) l'entier $5^{2n} + 5^n + 1$ est-il divisible par 3 ?
b) l'entier $2^{2n} + 2^n + 1$ est-il divisible par 7 ?

136 Forme d'un carré et d'un cube
1. Montrer que le carré d'un entier non multiple de 5 est de la forme : $5n + 1$ ou $5n - 1$.
2. Montrer que le cube d'un entier non multiple de 7 est de la forme : $7n + 1$ ou $7n - 1$.

137 Carré parfait
Montrer que le produit de 4 entiers consécutifs augmenté de 1 est un carré parfait.

138 Divisibilité
1. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 6 divise $(5n^3 + n)$.
2. Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $(4^{2^n} + 2^{2^n} + 1)$.

139 Décomposition de (8n + 7)
On veut montrer que le nombre $(8n + 7)$ n'est jamais la somme de trois carré parfait.
1. Quelle est la parité de $(8n + 7)$?
2. En déduire en raisonnant modulo 8, que la somme de trois carrés ne peut être congru à 7.
3. Conclusion.

140 Somme de trois cubes
Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

141 Congruence puissance *n*
On rappelle la formule du binôme de Newton :
$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i .$$
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \geqslant 2$, montrer que :
$$a \equiv b \ (n) \Rightarrow a^n \equiv b^n \ (n^2).$$

142 Solutions rationnelles
Soit $P(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.
Le but de cet exercice est de montrer que $P(x) = 0$ n'a pas de solutions entières ou rationnelles.

1. On suppose qu'il existe une solution rationnelle $x = \dfrac{p}{q}$ fraction irréductible.
Montrer que : $p^3 - p^2q - 2pq^2 + q^3 = 0$ (E).
2. Montrer que (E) se met sous la forme :
$$p^2(p - q) + q^3 \equiv 0 \ (2) \quad (E').$$
3. Montrer que (E′) n'admet des solutions que si p est pair.
4. Conclure.

143 Duel Fort Boyard
Un candidat de Fort Boyard est opposé au « Maître du temps » dans le duel suivant.
Face à un alignement de 20 bâtonnets, chacun doit, à tour de rôle, retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets.
Celui que retire le dernier bâtonnet a perdu.
Le candidat commence.
Indiquer une méthode où le candidat est sûr de gagner son duel.