Exercices vers le supérieur p. 100-101

123. Le numéro INSEE ou de sécurité sociale

1. $A = 10^6 \times B$, or $10^2 \equiv 3\ (97)$ donc $10^6 \equiv 3^3 \equiv 27\ (97)$.

On a alors : $A \equiv 27B + C\ (97)$.

2. $B = 2\,840\,717 = 97 \times 29\,285 + 72$

$C = 300\,941 = 97 \times 3\,102 + 47$

Donc $B \equiv 72\ (97)$ et $C \equiv 47\ (97)$.

On a alors : $A \equiv 27 \times 72 + 47 \equiv 1\,991\ (97)$.

Or $1\,991 = 97 \times 20 + 51$ donc $A \equiv 51\ (97)$.

On a alors : $K = 97 - 51 = 46$.

3. On peut écrire le programme suivant :

```
cle(B,C):
    A=27*B+C
    K=97-A%97
    return K
```

```
cle(1 620 674,86 017)=76
```

4. Si un des 15 chiffres de la clé est erroné :

• Un des chiffres de A est erroné.

Soit $A = \overline{a_{12}a_{11}...a_0}$

Supposons que c'est le i-ieme chiffre. C'est-à-dire qu'au lieu de a_i , on a a_i'. Il faut alors comparer le vrai nombre A avec le nombre erroné A'. Si l'erreur n'est pas détectée, on a

$$A - A' = (a_i - a_i') \times 10^i \equiv 0\ (97)$$

97 doit diviser $(a_i - a_1') \times 10^i$, comme 97 et 10^i sont premiers entre eux, alors 97 divise $(a_i - a_i')$. Or $-9 \leqslant a_i - a_i' \leqslant 9$ donc $a_i - a_i' = 0 \Leftrightarrow a_i = a_i'$.

Donc si $a_i \neq a_i'$ l'erreur est détectée.

• Un des deux chiffres de K est erroné, l'erreur est automatiquement détectée car K est un reste.

Si on inverse deux chiffres consécutifs de A soit a_i et a_{i+1}.

$$A - A' = (9a_{i+1} - 9a_i) \times 10^i$$

Si l'erreur n'est pas détectée, 97 doit diviser $(9a_i - 9a_1') \times 10^i$, comme 97 et 10^i sont premiers entre eux, alors 97 divise $(9a_i - 9a_i')$. Or $-81 \leqslant 9a_i - 9a_i' \leqslant 81$ donc $a_i - a_i' = 0 \Leftrightarrow a_i = a_i'$.

L'erreur est donc détectée.

124. Écriture décimale et divisibilité

1. $u_1 = 31$, $u_2 = 331$, $u_3 = 3331$

2. a) Initialisation : $n = 0$, on a $3u_0 = 3 = 10^1 - 7$

La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $3u_n = 10^{n+1} - 7$, montrons que $3u_{n+1} = 10^{n+2} - 7$:

$3u_{n+1} = 30u_n + 63 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{n+2} - 7$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3u_n = 10^{n+1} - 7$.

b) $3u_n = \underbrace{99...93}_{n \text{ fois}}$ donc $u_n = \underbrace{33...31}_{n \text{ fois}}$

3. D'après la terminaison de u_n, 2 et 5 ne divise pas u_n et la somme S de ses chiffres $S \equiv 1\ (3)$ donc 3 ne divise pas u_n.

4. a) De $10 \equiv -1\ (11)$ et $-7 \equiv 4\ (11)$, on en déduit : $3u_n \equiv (-1)^{n+1} + 4 \equiv 4 - (-1)^n$.

b) On a $u_n \equiv 3\ (11)$ ou $u_n \equiv 5\ (11)$.

11 ne divise pas $3u_n$ comme 11 et 3 sont premiers entre eux, 11 ne divise pas u_n.

5. a) $10^2 \equiv -2\ (17) \overset{\uparrow 8}{\Rightarrow} 10^{16} \equiv 2^8 \equiv 1\ (17)$

b) On a aussi $10^2 \equiv -2\ (17) \overset{\uparrow 4}{\Rightarrow} 10^8 \equiv 2^4 \equiv -1\ (17)$

$3u_{16k+8} = 3 \times 10^{16k+8+1} - 7$

$3u_{16k+8} = 3(10^{16})^k(10^8)(10) - 7$.

Donc $3u_{16k+8} \equiv 3(1)^k(-10) - 7 \equiv -37 \equiv -3\ (17)$.

17 ne divise pas $3u_{16k+8}$ comme 17 et 3 sont premiers entre eux, 17 ne divise pas u_{16k+8}.

125. Carré parfait

On montre à l'aide d'un tableau de congruence que les terminaisons d'un carré sont : 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.

1 295 377 se termine par 7 donc ce n'est pas un carré.

126. Système de congruences

1. $11 \equiv 2\ (3)$ et $11 \equiv 1\ (5)$ donc 11 est solution de (S).

2. Si n est solution de (S) alors :

$n \equiv 2\ (3) \overset{-11}{\Rightarrow} n - 11 \equiv -9 \equiv 0\ (3)$

$n - 11$ est divisible par 3.

3. De même si Si n est solution de (S) alors :

$n \equiv 1\ (5) \overset{-11}{\Rightarrow} n - 11 \equiv -10 \equiv 0\ (5)$

$n - 11$ est divisible par 5.

5 et 3 sont premiers entre eux donc 15 divise $n - 11$. On alors $n - 11 = 15k \Rightarrow n = 11 + 15k$.

Réciproquement, on vérifie rapidement que si $n = 11 + 15k$ alors : $n \equiv 2\ (3)$ et $n \equiv 1\ (5)$.

Les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, $k \in \mathbb{Z}$.

127. Base 12 et divisibilité

1. a) $N_1 = 11 \times 12^2 + 12 + 10 = 1606$

b) Par divisions successives par 12, on trouve : $N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12}$.

2. a) Comme $12 \equiv 0\ (3) \overset{i \neq 0}{\Rightarrow} 12^i \equiv 0\ (3)$

$N \equiv a_0\ (3)$

Un nombre, en base 12, est divisible par 3 si, et seulement si, son dernier chiffre est divisible par 3.

b) N_2 dans son écriture en base 12 se termine par 3 donc N_2 est divisible par 3.

3. a) $12 \equiv 1\ (11) \overset{\forall i \in \mathbb{N}}{\Rightarrow} (12^i \equiv 1)(12)$

$$N = \sum_{i=0}^{n} a \times 12^i \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ (3)$$

Un nombre, en base 12, est divisible par 11 si, et seulement si, la somme de ses chiffres est divisible par 11.

b) La somme S_1 des chiffres de $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$:

$S_1 = 11 + 1 + 10 = 22 \equiv 0\ (11)$

Donc N_1 est divisible par 11.

4. $N = \overline{x4y}^{12}$ est divisible par 33 si, et seulement si, N est divisible par 3 et par 11 (car 3 et 11 sont premiers entre eux).

En appliquant les critères de divisibilité, on a :

$$\begin{cases} y \equiv 0\ (3) \\ x + 4 + y \equiv 0\ (11) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv 0\ (3) \\ x \equiv -4 - y\ (11) \end{cases}$$

x et y étant des chiffres compris entre 0 et 11, 4 choix sont possibles pour y : 0, 3, 6, 9. x est alors le

reste de la division par 11 de $(-4 - y)$. On peut alors remplir un tableau :

y	0	3	6	9
$-4 - y$	-4	-7	-10	-13
x	7	4	1	9

Les solutions sont : $\overline{740}^{12}$; $\overline{443}^{12}$; $\overline{146}^{12}$; $\overline{949}^{12}$.

Soit en base 10 : 1 056 ; 627 ; 198 ; 1 353.

Ces 4 nombres sont multiples de 33.

128. Division euclidienne

a) $3^3 \equiv 2\ (25)$ et $2^{10} \equiv 1024 \equiv -1\ (25)$

$3^{2089} \equiv (3^3)^{696} \times 3 \equiv (2^{10})^{69} \times 2^6 \times 3 \equiv (-1)^{69} \times 64 \times 3$

$\equiv -192 \equiv 8\ (25)$

Le reste est 8.

b) $55 \equiv 6(7)$ et $6 \equiv -1\ (7)$

$55^{234567} \equiv 6^{234567} \equiv (-1)^{234567} \equiv -1 \equiv 6\ (7)$

Le reste est 6.

c) $4321 \equiv 2\ (7)$; $1232 \equiv 2\ (7)$; $2^3 \equiv 1\ (7)$

$4321^{1237} + 1234^{4321} \equiv (2^3)^{412} \times 2 + (2^3)^{1320} \times 2$

$\equiv 2 + 2 \equiv 4\ (7)$

Le reste est 7.

129. Divisibilité

Initialisation : $n = 0$, on a :

$(a + 1)^{0+1} - a(0 + 1) - 1 = 0$.

Donc divisible par a^2. La proposition est initialisée.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que

$(a + 1)^{n+1} - a(n + 1) - 1 \equiv 0\ (a^2)$.

En multipliant par $(a + 1)$ on a :

$(a + 1)^{n+2} - a(a + 1)(n + 1) - (a + 1) \equiv 0\ (a^2)$

$(a + 1)^{n+2} - a(n + 2) - 1 \equiv a^2(n + 1)\ (a^2)$

$(a + 1)^{n+2} - a(n + 2) - 1 \equiv 0\ (a^2)$

La proposition est héréditaire.

Conclusion : par initialisation et hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(a + 1)^{n+1} - a(n + 1) - 1$ est multiple de a^2.

130. Résolution d'équation (1)

$17 \equiv 1\ (8)$; $31 \equiv -1\ (8)$; $22 \equiv 6\ (8)$

$17x^2 - 31y^2 = 22 \overset{\text{mod } 8}{\Rightarrow} (x^2 + y^2 \equiv 6\ (8))$

On remplit un tableau pour connaître les restes d'un carré modulo 8 :

$a \equiv \ldots\ (8)$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 \equiv \ldots\ (8)$	0	1	4	1	0	1	4	1

Les restes possibles avec la somme de 2 carrées modulo 8 sont : 1 ; 4 ; 2 ; 5 ; 0.

L'équation n'a donc pas de solution.

131. Résolution d'équation (2)

1. $x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$

2. On obtient le tableau

$t \equiv \ldots\ (12)$	0	1	2	3	4	5	6
$t^2 \equiv \ldots\ (12)$	0	1	4	9	4	1	0

3. En remarquant que :

$(t + 6)^2 \equiv t^2 + 12t + 36 \equiv t^2\ (12)$

On a à l'aide du tableau :

$t^2 \equiv 1\ (12) \Leftrightarrow t \equiv 1\ (6)$ ou $t \equiv 5\ (6)$

4. $x^2 - 4x + 3 \equiv 0\ (12) \Leftrightarrow (x - 2)^2 \equiv 1\ (12)$

On trouve alors : $x \equiv 3\ (6)$ ou $x \equiv 1\ (6)$.

132. Équations

a) Pas de solution. **b)** $x \equiv 6\ (7)$

c) $x \equiv 9\ (26)$ ou $x \equiv 22\ (26)$ **d)** $x \equiv 8\ (11)$

133. Systèmes

En s'inspirant de l'exercice 126 :

a) $x \equiv 13\ (30)$ **b)** Pas de solution.

134. Équation du second degré

En remarquant que :

$x^2 - 2x + 2 \equiv x^2 - 2x + 2 - 17 \equiv x^2 - 2x - 15\ (17)$

On peut factoriser avec la forme canonique :

$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$

Donc 17 divise $x^2 - 2x + 2$ si et seulement si 17 divise $(x - 5)(x + 3)$ donc comme 17 est premier 17 divise $(x - 5)$ ou $(x + 3)$. On en déduit que :

$x \equiv 5\ (17)$ ou $x \equiv -3 \equiv 14\ (17)$.

135. Divisibilité

a) $5^2n + 5^n + 1 \equiv 2^n + 2 \equiv 2(2^n - 1)\ (3)$

3 divise $2^n - 1$ donc n est pair.

b) Le cycle des restes de 2^n par 7 est de 3.

Par disjonction des cas :

si $n \equiv 0\ (3)$ alors $2^2n + 2^n + 1 \equiv 3\ (7)$;

si $n \equiv 1\ (3)$ alors $2^2n + 2^n + 1 \equiv 7 \equiv 0\ (7)$;

si $n \equiv 2\ (3)$ alors $2^2n + 2^n + 1 \equiv 21 \equiv 0\ (7)$.

Les solutions sont les entiers n non multiples de 3.

136. Forme d'un carré et d'un cube

1. On peut faire une tableau :

a ... (5)	0	1	2	3	4
$a^2 \equiv$ ... (5)	0	1	−1	−1	1

Donc si a est non multiple de 5 alors :

$a^2 = 5n - 1$ ou $a^2 = 5n + 1$.

2. On peut faire une tableau :

a ... (7)	0	1	2	3	4	5	6
$a^3 \equiv$ ... (7)	0	1	1	−1	1	−1	−1

Donc si a est non multiple de 7 alors :

$a^2 = 7n - 1$ ou $a^2 = 7n + 1$.

137. Carré parfait

Si la proposition est vraie alors, on doit avoir :

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (an^2 + bn + c)^2$

En considérant les termes extrêmes, on doit avoir $a = c = 1$. Ensuite, on développe et on identifie :

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = n^2 + 3n^3 + 11n^2 + 6n + 1$

$(n^2 + bn + 1)^2 = n^4 + 2abn^3 + (b^2 + 2)\, n^2 + 2an + 1$

On déduit que l'égalité est vraie pour $b = 3$

$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

138. Divisibilité

1. $5n^3 + n \equiv -n^3 + n \equiv -n(n - 1)(n + 1)\ (6)$

Comme n et $(n + 1)$ sont deux entiers consécutifs, l'un des deux est pair.

Comme $(n - 1)$, n et $(n + 1)$ sont trois entiers consécutifs, l'un des trois est multiple de 3.

2 et 3 divise $n(n - 1)(n + 1)$ donc 6 divise ce produit et donc $5n^3 + n \equiv 0\ (6)$.

2. [ERRATUM] la première édition du manuel contient une erreur corrigée dans les éditions suivantes : « ... 7 divise $(\mathbf{4^{2^n}} + \mathbf{2^{2^n}} + 1)$. »

On a : $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1 = 2^{2^n}(2^{2^n} + 1) + 1$

$2^{2^0} \equiv 2$, $2^{2^1} \equiv 4\ (7)$ et $2^{2^2} \equiv 2\ (7)$ donc le cycle des restes de 2^{2^n} par 7 est de 2.

Par disjonction des cas :

si n pair alors $2^{2^n}(2^{2^n} + 1) + 1 \equiv 7 \equiv 0\ (7)$;

si n impair alors $2^{2^n}(2^{2^n} + 1) + 1 \equiv 21 \equiv 0\ (7)$.

Donc $4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$ est divisible par 7.

139. Décomposition de $(8n + 7)$

1. $8n + 7$ est impair.

2. On remplit un tableau des restes des carrés modulo 8 :

$a \equiv$ ... (8)	0	1	2	3	4	5	6	7
$a^2 \equiv$ ... (8)	0	1	4	1	0	1	4	1

Les restes possibles pour un carré sont 0, 1, 4.

Les restes impairs possibles avec la somme de 3 carrés modulo 8 sont possible avec 1 ou 3 restes impairs :

- 1 reste impair : 1 ou 5 ;
- 3 restes impairs : 3.

On ne peut donc pas obtenir un reste de 7.

3. $8n + 7$ ne peut pas être obtenu avec la somme de trois carrés.

140. Somme de trois cubes

On développe :

$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 = 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$

On en déduit alors que :

$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \equiv 3n^3 + 15n\ (9)$

Comme $15 \equiv -3\ (9)$, on a :

$n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 \equiv 3n(n - 1)(n + 1)(9)$

$(n - 1)$, n et $(n + 1)$ trois entiers consécutifs donc le produit est multiple de 3 et donc :

$3n(n - 1)(n + 1) \equiv 0\ (9)$

141. Congruence puissance n

$a \equiv b\ (n) \Leftrightarrow a = b + kn,\ k \in \mathbb{Z}$

$$a^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i}(kn)^i = b^n + \binom{n}{1} bkn + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i}(kn)^i$$

Comme $i \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} b^{n-i}(kn)^i \equiv 0\ (n^2)$

$\displaystyle\binom{n}{1} bkn = bkn^2 \equiv 0\ (n^2)$

On a donc $a^n \equiv b^n\ (n^2)$.

142. Solutions rationnelles

1. On remplace x par $\dfrac{p}{q}$ dans l'équation et en multipliant par q^3, on obtient : $p^3 - p^2q - 2pq^2 + q^3 = 0$

2. En raisonnant modulo 2, on obtient alors :

$p^3 - p^2q + q^3 \equiv 0\ (2) \Leftrightarrow p^2(p - q) + q^3 \equiv 0\ (2)$

3. On sait que q et q^3 ont même parité donc

$q^3 \equiv q \Leftrightarrow -q + q^3 \equiv 0\ (2)$.

Si $p \equiv 1\ (2)$, l'équation (E) devient :

$1 - q + q^2 \equiv 0\ (2) \overset{-q+q^3\equiv 0\ (2)}{\Leftrightarrow} 1 \equiv 0\ (2)$

Si p est impair l'équation (E) n'a pas de solution.

4. Si p est pair alors l'équation (E) devient :

$q^3 \equiv 0\ (2) \Leftrightarrow q \equiv 0\ (2)$

p et q sont pair ce qui est contradictoire avec $\frac{p}{q}$ irréductible.

L'équation (E) n'admet pas de solution rationnelle.

143. Duel Fort Boyard

Il faut avoir une stratégie simple pour que le joueur A qui commence gagne à tous les coups. Comme les joueurs peuvent prendre 1, 2, ou 3 bâtonnets à chaque tour, il faut raisonner modulo 4. Le joueur A fait en sorte que le nombre de bâtonnets enlevés, après que le deuxième joueur B ait joué, soit de 4. Par exemple si le joueur B prend 1 bâtonnet, le joueur A prend 3 bâtonnets. Le joueur A prend n bâtonnets au premier tour. Après k tours et après que le joueur A ait joué, il ne doit rester qu'un bâtonnet. On doit donc avoir :

$$n \equiv 19 \equiv 3\ (4)$$

Pour que le joueur A gagne à tous les coups, il faut donc qu'il prenne 3 bâtonnets au premier tour et qu'il prenne ensuite le complément à 4 de ce que le joueur B prendra.