Équations différentielles et primitives

I. Équations différentielles et primitives

1. Équations différentielles

Définition - Équation différentielle

- Une équation différentielle est une égalité liant une fonction inconnue y de la variable x, ses dérivées successives y' , y'' , … .. et éventuellement d'autres fonctions (constantes, f …).
- On appelle solution d'une équation différentielle toute fonction dérivable …………………………..
Résoudre une équation différentielle, c'est trouver ……………………………….. vérifiant l'égalité.

Exemple

La fonction $x \mapsto e^x$ est solution de l'équation $y'' - y = 0$ car, ……………………………………….

Remarques

① La dérivée est associée à un ……………………………., quotient des variations de y sur les variations de x, d'où le terme ………………………………….
② On peut être amené à utiliser l'écriture différentielle … … … … … … … ou … … … … … … … … … ..

Exemples

$a)$ … … … … … … … … … $b)$ … … … … … … … … … $c)$ … … … … … . . $d)$ … … … … … … … … … ..

- **Méthode 1 page 207**

Méthode 1 Montrer qu'une fonction y est solution d'une équation différentielle

Énoncé

1. Montrer que la fonction y est solution de l'équation $y' = f$ sur I :
$y(x) = 3x^5 - x^2 + 5x - 1$; $f(x) = 15x^4 - 2x + 5$, avec $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \cos x$ est solution de l'équation $y'' + y = 0$.

Conseils & Méthodes

2. Primitives de fonctions continues

Exemple :

On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$ et $F(x) = x^2 + 3x - 1$.
On constate que … … … … … … … … … … … … … … … … … … ….
On dit dans ce cas que F est ……………………………………

Définition

f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle ……………………..de f sur I, une fonction F dérivable sur I telle que … … … … … ….

Remarque :

Dans ces conditions, on a l'équivalence : « F a pour …………… f » et « f a pour ……………….. F ».

Exemple :

$F(x) = x$ est une primitive de $f(x) =$ … … .. car … … … … … … … … … pour tout réel x.

Propriété

f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour tout réel C, la fonction $x \mapsto$ … … … … … … est une primitive de f sur I.

Preuve :

…

Propriété (admise)

Toute fonction continue sur un intervalle admet ………………………………………………...

Remarque :

Bien que l'existence étant assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue.
Par exemple, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite.

Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x)=a\,,\ a\in\mathbb{R}$		
$f(x)=x^n \ \ ,n\geq 0$ entier		
$f(x)=x^n \ \ ,\ \ n<-1$ entier		
$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$		
$f(x)=\dfrac{1}{x}$		
$f(x)=e^x$		
$f(x)=\cos x$		
$f(x)=\sin x$		

- **Méthode 2 page 207**

Méthode **2** **Déterminer une primitive d'une fonction usuelle**

Énoncé

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une primitive F sur $I =]0\,;+\infty[$ ou $I = \mathbb{R}$.

a) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ **b)** $x \mapsto x^3$ **c)** $x \mapsto \dfrac{1}{x^4}$

Propriété - Linéarité des primitives

f et g sont deux fonctions continues sur $[a\,;\,b]$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a\,;\,b]$ alors :

- … … … … … … … est une primitive de $f+g$,
- … … … … … …est une primitive de kf avec k réel.

Preuve :

…

- **Méthode 3 page 209**

Méthode 3 Déterminer l'ensemble des primitives d'une fonction, ou une primitive avec conditions initiales

Énoncé

1. Soit $f : x \mapsto 3x^2 + \frac{1}{x}$. Vérifier que la fonction $F : x \mapsto x^3 + \ln(x)$ est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2. En déduire l'ensemble des primitives de f sur $]0 ; +\infty[$. Déterminer celle qui prend en e la valeur 0.

Propriétés - Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$, $n \neq -1$ entier		
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$		
$\frac{u'}{u}$		
$u'e^u$		
$u'\cos u$		
$u'\sin u$		

➢ **Méthode 4 page 207**

Méthode 4 Déterminer une primitive

Énoncé

Pour chacune des fonctions proposées, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ ou $]0 ; +\infty[$.

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ **b)** $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+5)^3}$

II. Résolution des équations différentielles

1. Résolution de l'équation différentielle : $y' = a\,y \;\; (a \neq 0)$

Propriété - Solution Générale

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions f_k définies par

… … … … … … … … … … … … … … … … … … . ;

Preuve :

…

Propriété - Condition Initiale

Pour tout couple de réel $(x_0 ; y_0)$, l'équation $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$ admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Preuve :

…

- **Méthode 5 page 211**

Méthode 5 Résoudre l'équation $y' = ay$

Énoncé

1. Résoudre l'équation $3y' = 2y$.
2. Donner l'allure des courbes solutions.
3. Déterminer ensuite l'unique solution f telle que $f(1) = \mathrm{e}$.

2. Résolution de l'équation différentielle : $y' = ay + b\ (a \neq 0)$

Propriété - Solution générale

Les solutions dans IR de l'équation différentielle $y' = ay + b\ (a \neq 0)$ sont les fonctions f_k définies par

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

Preuve :

…

Propriété - Condition initiale

Pour tout couple de réel $(x_0\,;y_0)$, l'équation $y' = ay + b\ (a \neq 0)$ admet une solution et une seule telle que $f(x_0) = y_0$

Preuve :

…

- **Méthode 6 page 211**

Méthode 6 Résoudre l'équation $y' = ay + b$

Énoncé

Déterminer les solutions de l'équation $2y' = 8y - 10$ puis trouver la solution qui s'annule en 1.