Equations différentielles au BAC

Exercice 1 - Baccalauréat S Asie 18 juin 2019 (6 points)

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80°C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité:

$$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.
Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0{,}2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} - T_n = -0{,}2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n: $u_n = T_n - 10$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (T_n).

4. On considère l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{l} \mathit{Tant\ que}\ T \geqslant 40 \\ \quad T \leftarrow 0{,}8T + 2 \\ \quad n \leftarrow n + 1 \\ \mathit{Fin\ Tant\ que} \end{array}$$

   (a) Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
   Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   (b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.
Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0{,}2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0{,}2\theta(t)$.
   (a) Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $f(t) = \frac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$.
   Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.
   (b) En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.
   En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.

(c) Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.

2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0; +\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0; +\infty[$:

$$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}, \text{où } t \text{ est exprimé en minute et } g(t) \text{ en degré Celsius.}$$

Une personne aime boire son café à 40°C.
Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0; +\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.

<u>Exercice 2 - Métropole 7 juin 2021 Sujet 1</u>

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y + 2x\mathrm{e}^x$$

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2\mathrm{e}^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).

2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - u(x)$$

(a) Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle: $y' = y$.
On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.

(b) À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).

3. Étude de la fonction u

(a) Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.
(b) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).
(c) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

<u>Exercice 3 – Asie Juin 2021 J1</u>

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0{,}4y + 0{,}4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\, +\infty[$.

1. Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
3. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\, +\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

Déterminer la limite de p en $+\infty$.

1. Montrer que $p'(t) = \frac{3{,}6\mathrm{e}^{-0,4t}}{(1+9\mathrm{e}^{-0,4t})^2}$ pour tout $t \in [0\,;\, +\infty[$.

2. (a) Montrer que l'équation $p(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\,;\, +\infty[$.
(b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0{,}4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.

Exercice 4 – Asie Juin 2021 J2

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation.
On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0{,}05(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1{,}95$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 1$.
(b) On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.
(c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0{,}95^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.
D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 0{,}05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.
Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$L(t) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0{,}05t}$$

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
(a) Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
(b) Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?