Évaluation n°1 - 5 septembre 2023 (1h30)

Exercice 1 (2 points)

Niveau 1

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, telle que $u_2 = 4096$.
   Déterminer en justifiant la valeur de u_{10}.

On a $u_{10} = u_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-2} \Leftrightarrow u_{10} = 4096 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{8} \Leftrightarrow u_{10} = 4096 \times \frac{1}{256} = 16 \Leftrightarrow \boxed{u_{10} = 16}$

2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison $r = -3$ telle que $u_{14} = 3$.
   Déterminer en justifiant la valeur de u_2.

On a $u_{14} = u_2 + (14-2) \times r \Leftrightarrow 3 = u_2 + 12 \times (-3) \Leftrightarrow u_2 = 3 + 36 = 39 \Leftrightarrow \boxed{u_2 = 39}$

Exercice 2 (2 points)

Niveau 1

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -3n^2 + 1$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (-3(n+1)^2 + 1) - (-3n^2 + 1) \\ &= -3(n^2 + 2n + 1) + 1 + 3n^2 - 1 \\ &= -3n^2 - 6n - 3 + 3n^2 \\ &= -6n - 3 \end{aligned}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-6n - 3 < 0$ $(car\ n \geq 0)$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui prouve que la suite est strictement décroissante.

Exercice 3 (3 points)

Niveau 1-2

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 3 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 - 3 = \frac{1}{3} \times 3 - 3 = -2 \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{3}u_1 - 3 = \frac{1}{3} \times (-2) - 3 = -\frac{11}{3}$$

2. La suite est-elle arithmétique, géométrique ? Justifier.
   - La suite **n'est pas arithmétique** car $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. En effet :

$$u_1 - u_0 = -2 - 3 = -5 \quad et \quad u_2 - u_1 = -\frac{11}{3} - (-2) = -\frac{11}{3} + 2 = -\frac{5}{3}$$

   - La suite **n'est pas géométrique** car $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. En effet :

$$\frac{u_1}{u_0} = -\frac{2}{3} \quad et \quad \frac{u_2}{u_1} = -\frac{11}{3} \times \frac{1}{-2} = \frac{11}{6}$$

Exercice 4 (5 points)

Niveau 1-2

On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve en naturelle.
En 2019, il y a 100 tigres. Puis chaque année, 10 % de la population de tigres meurt et il y a 5 nouveaux tigres qui sont ajoutés à la réserve.
On note u_n le nombre de tigres en $2019 + n$.

1) Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2020.

En 2019, il y a 100 tigres. Puis chaque année, 10 % de la population de tigres meurt et il y a 5 nouveaux tigres qui sont ajoutés à la réserve, donc en 2020 il y avait :

$$100 - 10\% \times 100 + 5 = 95 \ \ tigres$$

2) Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 5$

On note u_n le nombre de tigres en $2019 + n$ donc u_0 est le nombre de tigre en 2019 d'où $u_0 = 100$.

$$u_{n+1} = u_n - 10\% \times u_n + 5 = u_n - 0{,}1u_n + 5 = 0{,}9u_n + 5$$

3) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $50 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Soit P_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $50 \leq u_{n+1} \leq u_n$ »

Initialisation :
Pour $n = 0$: $u_0 = 100$ et $u_1 = 95$ donc $50 \leq u_1 \leq u_0$ et la propriété P_0 est vraie.

Hérédité
On suppose que pour n fixé , P_n est vraie c'est-à-dire que $50 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Peut on prouver dans ce cas que P_{n+1} est vraie c'est-à-dire que $50 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$?

On a :

$$50 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

$$\Leftrightarrow \quad 50 \times 0{,}9 \leq 0{,}9 \times u_{n+1} \leq 0{,}9 \times u_n \quad car\ 0{,}9 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 45 + 5 \leq 0{,}9u_{n+1} + 5 \leq 0{,}9u_n + 5$$

$$\Leftrightarrow \quad 50 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $50 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

4) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 50$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\ &= 0{,}9u_n + 5 - 50 \\ &= 0{,}9u_n - 45 \\ &= 0{,}9(u_n - 50) \\ &= 0{,}9v_n \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$ ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,9.

Exercice 5 (4 points)

Niveau 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$$

Soit P_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$ »

- Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = 10$ et $u_1 = \sqrt{10+5} = \sqrt{15}$ donc $2{,}5 \leq u_1 \leq u_0 \leq 10$ et la propriété P_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose que pour n fixé , on a $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.
Peut on prouver que $2{,}5 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 10$?
On a

$$2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$$

$$\Leftrightarrow \quad 2{,}5 + 5 \leq u_{n+1} + 5 \leq u_n + 5 \leq 10 + 5$$

$$\Rightarrow \quad 2{,}5 \leq \sqrt{7{,}5} \leq \sqrt{u_{n+1} + 5} \leq \sqrt{u_n + 5} \leq \sqrt{15} \leq 10 \quad \textit{car } \sqrt{} \textit{ est strictement croissante}$$

On a montré que la propriété est héréditaire : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

- Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $2{,}5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 10$.

Exercice 7 (4 points)

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (FAQ) sur son site internet.
On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.
On admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \text{ et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.

$u_2 = 0{,}9 \times u_1 + 1{,}3 = 0{,}9 \times 3 + 1{,}3 = 4$ et $u_3 = 0{,}9 \times u_2 + 1{,}3 = 0{,}9 \times 4 + 1{,}3 = 4{,}9$
On peut estimer à 400 le nombre de questions le 2e mois, et à 490 le 3e mois.

2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$: $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

- Initialisation

Pour $n = 1$, on a $u_1 = 3$ et $13 - \frac{100}{9} \times 0,9^1 = 13 - \frac{90}{9} = 3$.

La propriété est vérifiée au rang 1.

- Hérédité

On suppose la propriété vraie au rang n avec $n \geqslant 1$; autrement dit $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$; c'est l'hypothèse de récurrence.

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}3 = 0{,}9\left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n\right) + 1{,}3 = 0{,}9 \times 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} + 0{,}1 \times 13$$
$$= 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}$$

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

- Conclusion

La propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, on a: $u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n$.

3. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \geqslant 1$, on a:

$$u_{n+1} - u_n = \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1}\right) - \left(13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n\right) = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^{n+1} - 13 + \frac{100}{9} \times 0,9^n$$
$$= \frac{100}{9} \times 0,9^n(1 - 0{,}9) = \frac{100}{9} \times 0,9^n \times 0{,}1 > 0$$

donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 7 (1 point bonus)

Niveau 4

Montrer que 0,333333333… est un nombre rationnel.

Def : un nombre est rationnel lorsqu'il peut s'écrire sous forme d'une fraction irréductible.

$$a = 0{,}3333333\ldots$$
$$10a = 3{,}33333\ldots$$
$$10a - a = 3$$
$$9a = 3$$
$$a = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

a est donc bien un rationnel.