Évaluation n°2 - 20 sept 2023 (1h30)

**Exercice 1 (10 points) Asie 24 mars 2023**  Sujet 2

*Marie Sklodowska-Curie () est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.*

Deux Prix Nobel lui ont été décernés: un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en et un en Chimie en pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.

On décide d’étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.

Au début de l’expérience, on dispose d’un morceau de g de polonium.

On sait que g de polonium contient noyaux atomiques.

On admet que, au bout de 24 heures, des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors g de polonium.

On modélise la situation à l’aide d’une suite ; on note le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l’expérience.

Pour désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de jours écoulés.

1. (a) Vérifier que .

noyaux atomiques

(b) Expliquer que, pour tout nombre entier naturel , on a

Si est le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de jours, le lendemain 0,5 % ont disparu, il reste donc que l’on augmente de 0,005. Donc ou encore

1. (a) Démontrer, par récurrence sur , que .

*Initialisation* :

Pour ;

Pour , la relation de récurrence donne :

On a donc . la proposition est vraie au rang .

*Hérédité* : soit tel que . On peut écrire successivement :

soit .

La proposition est donc vraie au rang .

*Conclusion* : la proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang elle l’est aussi au rang

: d’après le principe de récurrence, pour tout :

(b) En déduire que la suite est convergente.

La partie gauche de la proposition montre que la suite est minorée par et la partie de droite montre que la suite est décroissante, donc la suite est convergente vers un réel .

1. On considère la suite définie, pour tout entier naturel , par :
2. Montrer que la suite est géométrique de raison .

D’après la définition on a :

L’égalité , vraie pour tout montre que la suite est géométrique de raison , de premier terme .

1. En déduire que, pour tout entier naturel .

On sait que le terme général de la suite est

Or

.

(c) En déduire la limite de la suite et interpréter le résultat dans le contexte de l’exercice.

Comme , on sait que , donc et enfin .

**Exercice 2 LA RÉUNION 29 mars 2023** Sujet 2

On considère la suite définie par et, pour tout entier naturel ,

1. Calculer .

Pour , on a

1. Soit la fonction définie sur l’intervalle par :

Ainsi, pour tout entier naturel , on a : .

On admet que la fonction est strictement croissante sur l’intervalle .

1. En déduire que pour tout réel , on a .

On a .

Or comme est croissante sur : d’après le calcul précédent.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a .

*Initialisation* : : la relation est vraie au rang puisque

*Hérédité* : soit tel que .

Alors par croissance de la fonction : .

Or : on a donc .

*Conclusion* : la relation est vraie au rang et si elle est vraie au rang elle l’est aussi au rang . Par le principe de récurrence quel que soit , .

1. On admet que, pour tout entier naturel , on a :
   1. Démontrer que la suite est décroissante.

On a et

Le signe du quotient précédent est donc celui de ; or

, donc ce qui signifie que la suite est décroissante.

* 1. En déduire que la suite est convergente.

La suite étant décroissante et minorée par 2 est donc convergente vers une limite , avec .

1. On définit la suite pour tout entier naturel par :
2. Calculer .
3. Démontrer que est une suite géométrique de raison .

On sait que

Or et en utilisant la relation précédente :

La relation vraie pour tout signifie que la suite est une suite géométrique de raison .

1. Déterminer, en justifiant, la limite de .

En déduire la limite de .

On a .

On sait qu’alors quel que soit , ou encore .

Or comme , on a et par produit de limites .

On a donc et comme , on a ,

soit enfin . Donc .