Devoir commun de seconde du 23/09/2023.

L'usage de la calculatrice est autorisé.
Durée 2 heures.
Le sujet doit obligatoirement ête rendu avec la copie.

NOM :………………………...   Prénom :………………………

Exercice 1. (18 points)

Dans cet exercice les questions sont indépendantes.
Détailler les étapes en justifiant soigneusement.

1. Calculer en détaillant :

$A = 6 + 2 \times 4 = 6 + 8 = 14$; $B = (2 + 4) \times (-3 + 5) = 6 \times 2 = 12$

$C = 2 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$; $D = \left(-2 + 3 \times (-1 + 3)\right) \times 4 = (-2 + 3 \times 2) \times 4 = 4 \times 4 = 16$

2. Calculer en détaillant.

$E = \frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \times 7}{5 \times 7} + \frac{3 \times 5}{7 \times 5} = \frac{14 + 15}{35} = \frac{29}{35}$ $\quad F = \frac{2 + 4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{3}{2}$

$G = \frac{3 + 5}{3 \times 5} - 2 = \frac{8}{15} - 2 = \frac{8}{15} - \frac{2 \times 15}{1 \times 15} = \frac{8 - 30}{15} = -\frac{22}{15}$ $\quad H = \frac{-3 - 2}{3} \times \frac{-1}{3} = \frac{-5}{3} \times \frac{-1}{3} = \frac{5}{9}$

3. Exprimer les nombres sous la forme 3^n avec $n \in Z$.

$I = 3^{12} \times 3^{210} = 3^{12+210} = 3^{222}$ $\quad J = 3^2 \times 3^{-23} = 3^{2-23} = 3^{-21}$

$K = \frac{3^{101}}{3^{56}} = 3^{101-56} = 3^{45}$ $\quad L = \frac{3^{-12}}{3^{-48}} = 3^{-12-(-48)} = 3^{-12+48} = 3^{36}$

$M = \frac{3^5 \times 3^4}{3^{-14} \times 3^{10}} = \frac{3^{5+4}}{3^{-14+10}} = \frac{3^9}{3^{-4}} = 3^{9-(-4)} = 3^{13}$

4. Donner l'écriture scientifique des nombres suivants sans justification,

$(a) 12\ milliards = 1{,}2 \times 10^{10}$ $\quad (b) 123{,}089 = 1{,}23089 \times 10^2$ $\quad (c) 0{,}13 \times 10^{23} = 1{,}3 \times 10^{22}$
et justifiez que

$$(d) \frac{120 \times 10^5}{3 \times 10^{123}} = 4 \times 10^{-117}; \quad (e) \frac{35 \times 10^3 \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}} = 5 \times 10^9.$$

$$(d)\ \frac{120 \times 10^5}{3 \times 10^{123}} = \frac{120}{3} \times 10^{5-123} = 40 \times 10^{-118} = 4 \times 10 \times 10^{-118} = 4 \times 10^{-117}$$

$$(e)\ \frac{35 \times 10^3 \times 3 \times 10^5}{21 \times 10^{-1}} = \frac{5 \times 7 \times 3 \times 10^8}{3 \times 7 \times 10^{-1}} = \frac{5 \times 10^8}{10^{-1}} = 5 \times 10^{8-(-1)} = 5 \times 10^9$$

Exercice 2. (13 points)
Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Évaluer l'expression littérale pour la valeur de x proposée.
Exemple : si $x = 1$ alors $x + 1 = 2$.

$$(a)\ Si\ \ x = 4\ \ alors\ \ 3x^2 + x + 1 = \boxed{53} \qquad (b)\ Si\ \ x = -2\ \ alors\ \ \frac{x^2+1}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

2. Résoudre les équations suivantes.

$$(a)\ \ 2x + 1 = 3 \ \Leftrightarrow\ 2x = 2 \ \Leftrightarrow\ x = 1\ \ donc\ \ \boxed{S = \{1\}}$$

$$(b)\ \ -3x + 2 = -5 - 5x \ \Leftrightarrow\ -3x + 5x = -5 - 2 \ \Leftrightarrow\ 2x = -7$$

$$\Leftrightarrow\ x = -\frac{7}{2}\ \ donc\ \ \boxed{S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}}$$

$$(c)\ (x - 7)(2x - 3) = 0 \ \Leftrightarrow\ x - 7 = 0\ \ ou\ \ 2x - 3 = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 7\ \ ou\ \ 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow\ x = 7\ \ ou\ \ x = \frac{3}{2}\ \ donc\ \ \boxed{S = \left\{7\,;\frac{3}{2}\right\}}$$

3. Donner une expression développée, ordonnée et réduite des expressions littérales suivantes.

$$R(x) = -3(-2x + 3)x = (6x - 9)x = \boxed{6x^2 - 9x}$$

$$S(x) = (2x - 1)(3 - x) = 6x - 2x^2 - 3 + x = \boxed{-2x^2 + 7x - 3}$$

$$U(x) = (x - 1)^2 - (x + 1)^2 = (x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1) = \boxed{-4x}$$

$$T(x) = (2 - 3x)^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times 3x + (3x)^2 = \boxed{9x^2 - 12x + 4}$$

4. Factoriser les expressions littérales suivantes.

$$V(x) = 4x^2 - 2x = 2 \times 2 \times x \times x - 2 \times x \times 1 = \boxed{2x(2x - 1)}$$

$$W(X) = 16x^2 + 16x + 4 = 4(4x^2 + 4x + 1) = 4((2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 \times 1^2) = \boxed{4(2x + 1)^2}$$

$$Y(x) = 4x^2 - (x + 1)^2 = (2x)^2 - (x + 1)^2 = \big((2x) - (x + 1)\big)\big((2x) + (x + 1)\big)$$

$$= (2x - x - 1)(2x + x + 1) = \boxed{(x - 1)(3x + 1)}$$

$$Z(x) = (x + 1)(x^2 + 1) - 2x(x + 1) = (x + 1)\big((x^2 + 1) - 2x\big) = (x + 1)(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \boxed{(x + 1)(x - 1)^2}$$

Exercice 3. (5 points)

On considère le programme de calcul suivant rédigé en Python :

```
a=5
b=a+2
b=b**2
b=b-a**2
```

*Rappel : la notation en Python « 3**2 » signifie « 3^2 ».*

On modifie la valeur choisie pour a en début de programme.

1) Si on choisit $a = 2$ comme nombre de départ, vérifier qu'on obtient 12 comme résultat. On pourra compléter le tableau d'état des variables donné en annexe pour s'aider.

	a	b
a=2	2	
b=a+2		4
b=b**2		16
b=b-a**2		$16 - 2^2 = 12$

2) Si on choisit $a = -8$ comme nombre de départ, quel résultat obtient-on ?

	a	b
a=-8	-8	
b=a+2		-6
b=b**2		$(-6)^2 = 36$
b=b-a**2		$36 - (-8)^2 = -28$

3) Si l'on choisit $a = x$ comme nombre de départ, exprimer en fonction de x, le résultat final de ce programme de calcul.

	a	b
a=x	x	
b=a+2		$x + 2$
b=b**2		$(x + 2)^2$
b=b-a**2		$(x + 2)^2 - x^2$

4) Montrer que $(x + 2)^2 - x^2 = 4x + 4$.

$$(x + 2)^2 - x^2 = (x^2 + 4x + 4) - x^2 = 4x + 4$$

5) Quelle valeur faut-il choisir pour a pour que le programme donne -3 ?

Il faut résoudre $4x + 4 = -3$

$$4x + 4 = -3 \iff 4x = -7 \iff x = -\frac{7}{4}$$

Il faut donc choisir $a = -\frac{7}{4}$

Exercice 4. (4 points)

1) Justifier que 330 n'est pas un nombre premier.

330 est divisible par 10, il n'est donc pas premier.

La décomposition en produit de facteurs premiers de 504 est : $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$.

2) Décomposer 330 en produit de facteurs premiers.

$$330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$$

3) Donner la forme irréductible de $\frac{330}{504}$.

$$\frac{330}{504} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 11}{2^3 \times 3^2 \times 7} = \frac{5 \times 11}{4 \times 3 \times 7} = \frac{55}{84}$$

4) Justifier que 165 divise 330.

$$330 = 165 \times 2$$

Donc 165 divise 330.

5) Justifier que 165 ne divise pas 504.

5 divise 165 mais pas 504 donc 165 ne divise pas 504.

Annexe de l'exercice 3.

Tableau d'état des variables.

	a	b
a=5	5	
b=a+2		7
b=b**2		49
b=b-a**2		$49 - 5^2 = 24$

<u>Exercice 1 et calculatrice</u>