**Évaluation Maths Expertes du mardi 26 septembre 2023**

**Exercice 1 – QCM à réponse unique**

1. La forme algébrique du complexe $z=i\left(2i-3\right) $est :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a) \left(-3+2i\right)i $$ | $$b) 2+3i$$ | $$c) 2-3i$$ | $$d) -2-3i$$ |

1. Soient $z\_{1}=2+3i$ et $z\_{2}=1-2i$ deux nombres complexes. La forme algébrique de $z\_{1}z\_{2}$ est :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a) -4-i$$ | $$b) 8-i$$ | $$c) 2+6i$$ | $$d) 8+i$$ |

1. La partie imaginaire de $\frac{2+3i}{1-2i}$ est égale à :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a)-\frac{3}{2}$$ | $$b) -\frac{3}{2}i$$ | $$c) \frac{7}{5}i $$ | $$d) \frac{7}{5}$$ |

1. Le conjugué de $\left(1-i\right)\left(1+i\right)$ est :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a) 2$$ | $$b) 0$$ | $$c) -2$$ | $$d) 1+i$$ |

1. Le nombre complexe $i^{4}$ est égal à :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a) -1$$ | $$b) -i$$ | $$c) 4i$$ | $$d) 1$$ |

1. Soit $z$ un nombre complexe. Le nombre complexe $z×\overline{z}$ est un :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a) Imaginaire pur$$ | $$b) Réel positif$$ | $c) $Entier naturel | $$d) Réel négatif$$ |

1. Soit $z$ un nombre complexe. Le nombre complexe $z+\overline{z}$ est un :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a) Imaginaire pur$$ | $$b) Réel $$ | $c) $Entier naturel | $$d) Complexe non réel$$ |

1. Soit $P$ le polynôme défini dans $C$ par $P\left(z\right)=z^{3}-1$. Alors le polynôme $P$ se factorise par :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a) z+1$$ | $$b) z-1$$ | $$c) z^{2}-1$$ | $$d) z^{2}+1$$ |

1. Soit $P$ le polynôme défini dans $C$ par $P\left(z\right)=z^{4}+3z^{2}-4$. Alors le polynôme $P$ se factorise par :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a) z+1$$ | $$b) z-1$$ | $$c) z+2$$ | $$d) z-2$$ |

1. Soit $P$ le polynôme défini dans $C$ par $P\left(z\right)=2z^{4}-3z^{2}+2z-1$. On admet que le polynôme est factorisable par $\left(z-1\right)$ donc $P\left(z\right)=\left(z-1\right)×Q(z)$ avec $Q(z)$ égal à :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| $$a)2z^{3}+2z^{2}-z+1 $$ | $$b) 2z^{3}-2z^{2}-z+1 $$ | $$c) 2z^{3}-2z^{2}+z+1 $$ | $$d) 2z^{3}-2z^{2}+z-1 $$ |

**Exercice 2 – Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$a=i-(2-5i) $$ | $$b=3\left(1+2i-\left(4+i\right)\right)$$ | $$c=2i^{2}+i+2\left(1-2i\right) $$ |

$$a=i-2+5i=-2+6i$$

$$b=3\left(1+2i-4-i\right)=3\left(-3+i\right)=-9+3i$$

$$c=-2+i+2-4i=0-3i$$

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$d=i^{3}-1$$ | $$e=\frac{4+i}{2+i} $$ | $$f=\frac{6+4i}{1-i}$$ |

$$d=i^{3}-1=-i-1=-1-i$$

$$e=\frac{4+i}{2+i}=\frac{(4+i)(2-i)}{\left(2+i\right)\left(2-i\right)}=\frac{8-4i+2i+1}{5}=\frac{9-2i}{5}=\frac{9}{5}-\frac{2}{5}i$$

$$f=\frac{6+4i}{1-i}=\frac{(6+4i)(1+i)}{\left(1-i\right)\left(1+i\right)}=\frac{6+6i+4i-4}{2}=\frac{2+10i}{2}=1+5i$$

**Exercice 3**

Résoudre dans $C$ chacune des équations suivantes.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$z\left(2+i\right)=3z-5 $$ | $$2z^{2}=3z-3$$ | $$2z-1=\overline{z}+1$$ |

$$a) z\left(2+i\right)=3z-5 ⟺ 2z+iz-3z+5=0 ⟺ z\left(-1+i\right)=-5 $$

$$⟺ z=\frac{-5}{-1+i}=\frac{-5\left(-1-i\right)}{\left(-1+i\right)\left(-1-i\right)}=\frac{5+5i}{2}=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}i$$

$$b) 2z^{2}=3z-3 ⟺ 2z^{2}-3z+3=0$$

C’est une équation du second degré dans $C $: $Δ=\left(-3\right)^{2}-4×2×3=9-24=-15$

$Δ<0 $ donc l’équation admet deux solutions complexes conjuguées : $\frac{-\left(-3\right)-i\sqrt{15}}{2×2}=\frac{3-i\sqrt{15}}{4}$ et $\frac{3+i\sqrt{15}}{4}$

$$c) 2z-1=\overline{z}+1$$

Posons $z=a+ib$ où $a$ et $b$ sont des réels. Alors $\overline{z}=a-ib.$

$$2z-1=\overline{z}+1 ⟺ 2z-\overline{z}-2=0 ⟺ 2\left(a+ib\right)-\left(a-ib\right)-2=0 ⟺ a+3ib-2=0 ⟺ \left(a-2\right)+3ib=0 ⟺ \left\{\begin{matrix}a-2=0\\3b=0\end{matrix}\right.⟺ \left\{\begin{matrix}a=2\\b=0\end{matrix}\right. ⟺ z=2$$

**Exercice 4**

Soit $P$ le polynôme défini sur $C$ par $P\left(z\right)=z^{4}+z^{3}+2z^{2}+z+1$.

Peut-on factoriser $P$ par $\left(z-i\right)$ ? Justifier.

$$P\left(i\right)=i^{4}+i^{3}+2i^{2}+i+1=1-i-2+i+1=0$$

$P\left(i\right)=0$ donc le polynôme est factorisable par $\left(z-i\right)$

**Exercice 5**

Montrer que 1 est une racine du polynôme $P$, puis factoriser $P$ en produit de polynômes de degré 1.

$$P\left(z\right)=2z^{3}-14z^{2}+38z-26$$

$P\left(1\right)=2-14+38-26=0$ donc $P$ est factorisable par $\left(z-1\right).$

Il existe donc un polynôme $Q$ de degré au plus 3 tel que $P\left(z\right)=\left(z-1\right)Q\left(z\right)=\left(z-1\right)\left(az^{2}+bz+c\right)$

$$\left(z-1\right)\left(az^{2}+bz+c\right)=az^{3}+bz^{2}+cz-az^{2}-bz-c=az^{3}+\left(b-a\right)z^{2}+\left(c-b\right)z-c$$

Donc $P\left(z\right)=\left(z-1\right)Q\left(z\right) ⟺ 2z^{3}-14z^{2}+38z-26=az^{3}+\left(b-a\right)z^{2}+\left(c-b\right)z-c $

$$⟺ \left\{\begin{matrix}a=2\\b-a=-14\\c-b=38\\-c=-26\end{matrix}\right. ⟺ \left\{\begin{matrix}a=2\\b=-12\\c=26\end{matrix}\right.$$

Donc $P\left(z\right)=\left(z-1\right)\left(2z^{2}-12z+26\right)$

$2z^{2}-12z+26$ est un polynôme du second degré : $Δ=\left(12\right)^{2}-4×2×26=144-208=-64$.

$Δ<0 $ donc l’équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$\frac{-\left(-12\right)-i\sqrt{64}}{2×2}=\frac{12-8i}{4}=3-2i$ et $3+2i$.

Finalement, $P\left(z\right)=2\left(z-1\right)\left(z-\left(3+2i\right)\right)\left(z-\left(3-2i\right)\right)$

**Question Bonus**

Calculer $\left(1+i\right)^{12}$

$$\left(1+i\right)^{2}=1+2i+i^{2}=2i$$

$$\left(1+i\right)^{4}=\left(2i\right)^{2}=-4$$

$$\left(1+i\right)^{12}=\left(\left(1+i\right)^{4}\right)^{3}=\left(-4\right)^{3}=-64$$