**Dérivation – Fonctions cosinus et sinus**

1. ***Rappels***
   1. **Dérivabilité et fonction dérivée**

**Définition – Nombre dérivé**

est une fonction définie sur un intervalle de .

Soient et deux réels tels que et appartiennent à .

On dit que la fonction est …………………. s'il existe un nombre réel , tel que : .

Le réel est alors appelé le …………………………….et est noté

**Définition – Fonction dérivable, fonction dérivée**

Soit une fonction définie sur un intervalle de .

La fonction si est dérivable en ……………………..

La fonction définie sur est appelée la ………………………..

**Remarques :**

* Une fonction peut être définie en mais non dérivable en .

Par exemple, prenons la fonction racine carrée qui est définie en 0.

On a

Donc, la fonction racine carrée n’est pas dérivable en 0.

* Les physiciens expriment une variation à l’aide du symbole . Ainsi, entre et , elle est notée et . On a alors : .
* On peut noter également qui exprime la différentielle de la fonction en par rapport à la variable . Cela sert à écarter toute ambiguïté s’il y a d’autres variables.
  1. **Application de la dérivation**

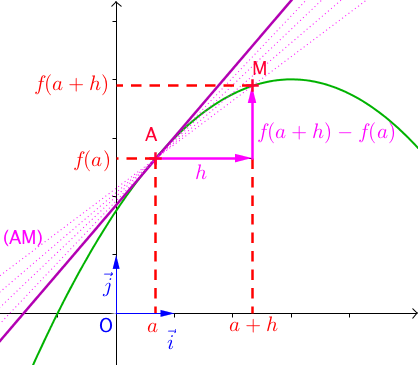
**Définition – Tangente en un point à une courbe**

Soit une fonction *f* dérivable en un nombre réel appartenant à .

Soit la courbe représentative de dans un repère

La tangente à la courbe au point A est la droite ………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..

Une équation de la tangente à la courbe au point d’abscisse est :



**Exemple :**

On considère la fonction trinôme *f* définie sur par .

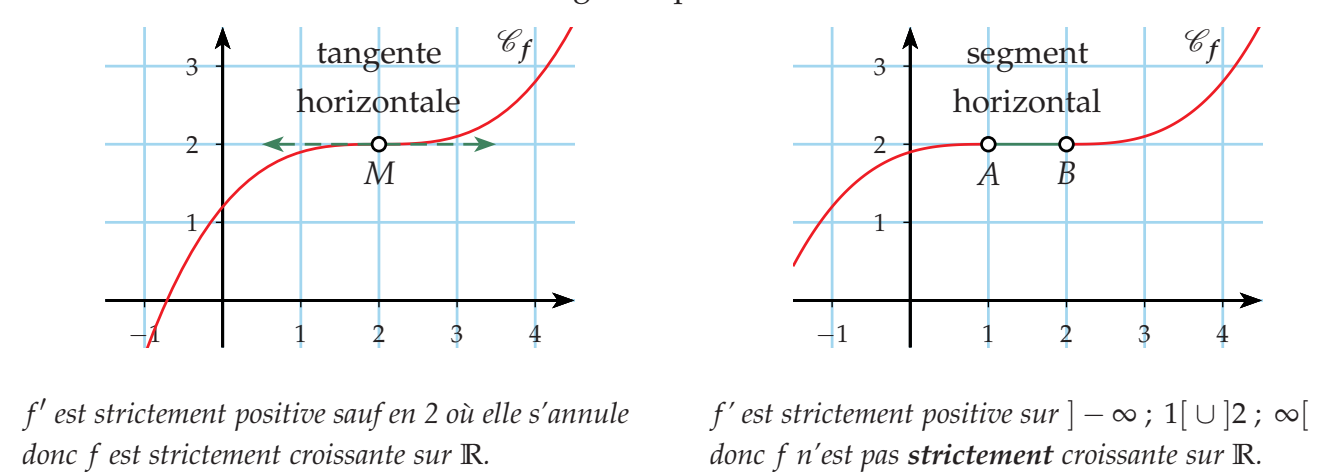
On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2.

**Propriétés - Du signe de aux variations de**

|  |
| --- |
| Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle de .   * Si est strictement positive sur , sauf ………………………………………………………………………………….., ……………………………………………………………………………………………………………………………………………….. * Si est strictement négative sur , sauf ………………………………………………………………………………….., ………………………………………………………………………………………………………………………………………………... * Si est nulle sur , alors …………………………………. |

**Remarque**

« ………………………………………………………………………………………………………………… » signifie que la courbe représentative de peut admettre …………………………………………….. mais ne peut avoir à aucun endroit la forme ………………………………………………………………..



* 1. **Calcul de dérivées**

**Propriété - Dérivées des fonctions usuelles**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| On désigne par l’ensemble de définition de la fonction .  Toutes les fonctions du tableau ci-dessous sont dérivables sur à l’exception de la fonction racine carrée qui n’est pas dérivable en zéro.   |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Fonction *f*** | **Ensemble de définition de *f*** | **Dérivée *f* '** | |  |  | ………….. | |  |  | …………… | |  |  |  | |  |  | …………… | |

**Exemples**

1. Soit la fonction *f* définie sur par
2. Soit la fonction *f* définie sur par

**Propriété - Opération sur les fonctions dérivées**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Soit un réel et deux fonctions et dérivables sur un intervalle .   * Les fonctions , et sont dérivables sur . * Les fonctions et sont dérivables sur sauf là où s’annule.  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Fonction |  |  |  |  |  | | Dérivée | …………. | …………. | …………… | ……….. | ……………. | |

**Exemples**

2. ***Dérivées de fonctions composées***

Dans cette partie, désigne une fonction et un intervalle.

**Propriété - Dérivée de**

|  |
| --- |
| Si est dérivable et strictement positive sur , alors est dérivable sur et |

**Preuve**

Soit un réel et un réel tel que soit dans . ……..

**Exemple**

**Propriété – Dérivée de et**

|  |
| --- |
| Soit . Si est dérivable sur alors :   * + La fonction est dérivable sur et …………   + La fonction est dérivable sur sauf là où s’annule et ………… |

**Preuve ……**

**Exemple**

**Propriété – Dérivée de**

|  |
| --- |
| Soit deux réels et . Si est dérivable sur alors :  La fonction est dérivable là où et  ……………. |

**Preuve : ……**

**MÉTHODE 1 - Dériver une fonction composée**

* 1. *On reconnaît le type de composée (, , ou ) et on identifie .*
  2. *On détermine les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction.*
  3. *On calcule et on applique la formule de dérivation qui convient.*

**Exemple**

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de , puis calculer .

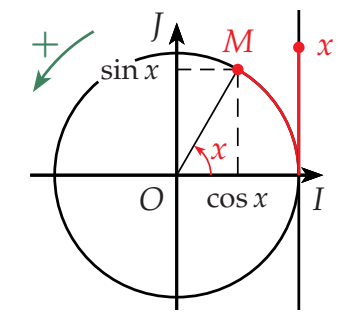
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) | 2) | 3) | 4) |

**Propriété (admise)**

|  |
| --- |
| Soit une fonction dérivable sur un intervalle de et une fonction dérivable sur un intervalle de telle que pour tout , .  La fonction composée de suivie de est dérivable sur , et pour tout : |

1. ***Fonctions cosinus et sinus***
   1. **Définition et rappels**

Soit un repère orthonormé direct. Le point , image d’un réel sur le cercle trigonométrique de centre , a pour coordonnées où est le cosinus de et est le sinus de .



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Propriété – Fonction cosinus et sinus**

|  |
| --- |
| * La fonction cosinus, notée , est la fonction définie sur par . * La fonction sinus, notée , est la fonction définie sur par . |

* 1. **Propriétés des fonctions cosinus et sinus**

**Définition - Fonction périodique**

|  |
| --- |
| Soit une fonction définie sur et un réel .  est périodique de période ou est -périodique si, pour tout , |

**Définition - Fonctions paire et impaire**

|  |
| --- |
| Soit une fonction définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0.   * Une fonction est paire si, pour tout , * Une fonction est impaire si, pour tout , ……………….. |

**Définition - Fonctions paire et impaire**

|  |
| --- |
| * Les fonctions et sont * La fonction est ………. et la fonction est …………... |

**Preuve : …..**

**Remarque**

* Dans un repère, les courbes représentatives de et « se répètent » tous les .
* Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées et celle de est symétrique par rapport à l’origine du repère.

* 1. **Dérivabilité et variations**

**Propriété (admise) - Dérivées des fonctions et**

|  |
| --- |
| Les fonctions et sont dérivables et continues sur . |

**Propriété**

|  |
| --- |
| * Les variations des fonctions et sur sont données par les tableaux ci-contre. * Les courbes représentatives de et sont appelées des sinusoïdes. |

**Preuve :** ……

**MÉTHODE 2 – Dériver une fonction formée de cos et sin**

*En général, ce type de fonction définie est dérivable sur . Si ce n’est pas le cas, on établira d’abord les ensembles de définition et de dérivabilité (Méthode 1).*

**Exemple**

Calculer . L’écrire sous une forme facilitant l’étude de son signe.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) |  | 3) |

**Propriété**

|  |
| --- |
|  |

**Preuve**

….

**MÉTHODE 3 – Étudier une fonction trigonométrique**

*Il arrive fréquemment qu’une fonction trigonométrique soit périodique et paire ou impaire. Cela amène alors souvent à étudier d’abord la fonction sur un intervalle restreint avant de l’étudier sur un ensemble plus grand.*

**Exemple**

Soit la fonction définie sur par .

* 1. Calculer . Étudier son signe sur . En déduire les variations de sur .
  2. Calculer . En déduire les variations de sur .
  3. Montrer que est -périodique.
  4. Tracer la courbe représentative de sur puis sur .