**Dérivation – Fonctions cosinus et sinus**

1. ***Rappels***
	1. **Dérivabilité et fonction dérivée**

**Définition – Nombre dérivé**

$f$ est une fonction définie sur un intervalle $I$ de $R$.

Soient $a$ et $h$ deux réels tels que $a $ et $ a+h$ appartiennent à $I$.

On dit que la fonction $f$ est …………………. s'il existe un nombre réel $l$, tel que : $……………………….$.

Le réel $l$ est alors appelé le …………………………….et est noté $………….$

**Définition – Fonction dérivable, fonction dérivée**

Soit une fonction $f$ définie sur un intervalle $I$ de $R$.

La fonction $……………………..$ si $f$ est dérivable en ……………………..

La fonction $f':x↦f'(x)$ définie sur $I$ est appelée la ………………………..

**Remarques :**

* Une fonction peut être définie en $a$ mais non dérivable en $a$.

Par exemple, prenons la fonction racine carrée qui est définie en 0.

On a $……$

Donc, la fonction racine carrée n’est pas dérivable en 0.

* Les physiciens expriment une variation à l’aide du symbole $Δ$. Ainsi, entre $x$ et $x\_{0}$, elle est notée $………………..$ et $…………………….$. On a alors : $f^{'}\left(x\_{0}\right)= ………….$.
* On peut noter $f'(a)$ également $…………..$ qui exprime la différentielle de la fonction $f$ en $a$ par rapport à la variable $x$. Cela sert à écarter toute ambiguïté s’il y a d’autres variables.
	1. **Application de la dérivation**

**Définition – Tangente en un point à une courbe**

Soit une fonction *f* dérivable en un nombre réel $a$ appartenant à $I$.

Soit $C\_{f}$ la courbe représentative de $f $dans un repère

La tangente à la courbe $C\_{f}$ au point A est la droite ………………………………………………………………………………………………………………………………………………………..

Une équation de la tangente à la courbe $C\_{f}$ au point d’abscisse $a$ est :

$$………………………………….$$



**Exemple :**

On considère la fonction trinôme *f* définie sur $R$ par $f(x)=x^{2}+3x-1$.

On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2.

**Propriétés - Du signe de** $f'(x)$ **aux variations de** $f$

|  |
| --- |
| Soit une fonction $f$ définie et dérivable sur un intervalle $I$ de $R$. * Si $f'$ est strictement positive sur $I$, sauf ………………………………………………………………………………….., ………………………………………………………………………………………………………………………………………………..
* Si $f'$ est strictement négative sur $I$, sauf ………………………………………………………………………………….., ………………………………………………………………………………………………………………………………………………...
* Si $f'$ est nulle sur $I$, alors $f$ ………………………………….
 |

**Remarque**

« ………………………………………………………………………………………………………………… » signifie que la courbe représentative de $f$ peut admettre …………………………………………….. mais ne peut avoir à aucun endroit la forme ………………………………………………………………..



* 1. **Calcul de dérivées**

**Propriété - Dérivées des fonctions usuelles**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| On désigne par $D\_{f}$ l’ensemble de définition de la fonction $f$.Toutes les fonctions du tableau ci-dessous sont dérivables sur $D\_{f}$ à l’exception de la fonction racine carrée qui n’est pas dérivable en zéro.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Fonction *f*** | **Ensemble de définition de *f*** | **Dérivée *f* '** |
| $f(x)=a$ $(a\in R)$ | $$R$$ | ………….. |
| $$f\left(x\right)=x^{n} (n\in N^{\*})$$ | $$R$$ | …………… |
| $$f(x)=\frac{1}{x}$$ | $$R^{\*}$$ | $$…………….$$ |
| $$f(x)=\sqrt{x}$$ | $$\left.[0;+\infty \right[$$ | …………… |

 |

**Exemples**

1. Soit la fonction *f* définie sur $R$ par $f(x)=x^{6}$
2. Soit la fonction *f* définie sur $R^{\*}$ par $f(x)=\frac{1}{x^{4}}$

**Propriété - Opération sur les fonctions dérivées**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Soit un réel $k$ et deux fonctions $u$ et $v$ dérivables sur un intervalle $I$.* Les fonctions $u+v$, $ku$ et $uv$ sont dérivables sur $I$.
* Les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur $I$ sauf là où $v$ s’annule.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Fonction | $$u+v$$ | $$ku$$ | $$uv$$ | $$\frac{1}{v}$$ | $$\frac{u}{v}$$ |
| Dérivée | …………. | …………. | …………… | ……….. | ……………. |

 |

**Exemples**

1. $f(x)=\left(2x^{2}-5x\right)\left(3x-2\right)$
2. $g(x)=\frac{6x-5}{x^{3}-2x^{2}-1}$
3. ***Dérivées de fonctions composées***

Dans cette partie, $u$ désigne une fonction et $I$ un intervalle.

**Propriété - Dérivée de** $\sqrt{u}$

|  |
| --- |
| Si $u$ est dérivable et strictement positive sur $I$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur $I$ et $\left(\sqrt{u}\right)^{'}…………$ |

**Preuve**

Soit un réel $a\in I$ et un réel $h>0$ tel que $a+h$ soit dans $I$. ……..

**Exemple**

$f(x)=\sqrt{3x^{2}+4x-1}$

**Propriété – Dérivée de** $u^{n}$ **et** $u^{-n}$

|  |
| --- |
| Soit $n\in N^{\*}$. Si $u$ est dérivable sur $I$ alors : * + La fonction $u^{n}$ est dérivable sur $I$ et $(u^{n})'=$…………
	+ La fonction $u^{-n}$ est dérivable sur $I$ sauf là où $u$ s’annule et $\left(u^{-n}\right)'=$…………
 |

**Preuve ……**

**Exemple**

$f(x)=\left(2x^{2}+3x-3\right)^{4}$

**Propriété – Dérivée de** $x⟼u\left(ax+b\right)$

|  |
| --- |
| Soit deux réels $a$ et $b$. Si $u$ est dérivable sur $I$ alors :La fonction $f:x↦u(ax+b)$ est dérivable là où $(ax+b)\in I$ et $f'(x)=$……………. |

**Preuve : ……**

**MÉTHODE 1 - Dériver une fonction composée**

* 1. *On reconnaît le type de composée (*$\sqrt{u}$*,* $u^{n}$*,* $u^{-n}$ *ou* $x↦u(ax+b)$*) et on identifie* $u$*.*
	2. *On détermine les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction.*
	3. *On calcule* $u'(x)$ *et on applique la formule de dérivation qui convient.*

**Exemple**

Déterminer les ensembles de définition $D$ et de dérivabilité $D'$ de $f$, puis calculer $f'(x)$.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) $f(x)=\sqrt{x^{2}-x-2}$ | 2) $f(x)=\left(\frac{3x-1}{2x-4}\right)^{2}$ | 3) $f(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^{3}}$  | 4)$ f(x)=(2x-3)^{5}$ |

**Propriété (admise)**

|  |
| --- |
| Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ de $R$ et $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $J$ de $R$ telle que pour tout $x\in I$, $u(x)\in J$.La fonction $f∘u$ composée de $u$ suivie de $f$ est dérivable sur $I$, et pour tout $x\in I$ : $$\left(f∘u\right)^{'}\left(x\right)= ……………….. ou \left[f\left(u\left(x\right)\right)\right]^{'}= …………………………$$ |

1. ***Fonctions cosinus et sinus***
	1. **Définition et rappels**

Soit $(O;I,J)$ un repère orthonormé direct. Le point $M$, image d’un réel $x$ sur le cercle trigonométrique de centre $O$, a pour coordonnées $(cosx ;sinx)$ où $cosx$ est le cosinus de $x$ et $sinx$ est le sinus de $x$.



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x$$ | 0 | $$\frac{π}{6}$$ | $$\frac{π}{4}$$ | $$\frac{π}{3}$$ | $$\frac{π}{2}$$ | $$π$$ |
| $$cosx$$ |  |  |  |  |  |  |
| $$sinx$$ |  |  |  |  |  |  |

**Propriété – Fonction cosinus et sinus**

|  |
| --- |
| * La fonction cosinus, notée $cos$, est la fonction définie sur $R$ par $cos:x↦cosx$.
* La fonction sinus, notée $sin$, est la fonction définie sur $R$ par $sin:x↦sinx$.
 |

* 1. **Propriétés des fonctions cosinus et sinus**

**Définition - Fonction périodique**

|  |
| --- |
| Soit $f$ une fonction définie sur $R$ et un réel $T$.$f$ est périodique de période $T$ ou est $T$-périodique si, pour tout $x\in R$, $……………………..$ |

**Définition - Fonctions paire et impaire**

|  |
| --- |
| Soit une fonction $f$ définie sur un ensemble $D\_{f}$ symétrique par rapport à 0.* Une fonction $f$ est paire si, pour tout $x\in D\_{f}$, $…………….$
* Une fonction $f$ est impaire si, pour tout $x\in D\_{f}$, ………………..
 |

**Définition - Fonctions paire et impaire**

|  |
| --- |
| * Les fonctions $cos$ et $sin$ sont $…………………$
* La fonction $cos$ est ………. et la fonction $sin$ est …………...
 |

**Preuve : …..**

**Remarque**

* Dans un repère, les courbes représentatives de $cos$ et $sin$ « se répètent » tous les $2π$.
* Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de $cos$ est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées et celle de $sin$ est symétrique par rapport à l’origine du repère.

* 1. **Dérivabilité et variations**

**Propriété (admise) - Dérivées des fonctions** $cos$ **et** $sin$

|  |
| --- |
| Les fonctions $cos$ et $sin$ sont dérivables et continues sur $R$.* $cos^{'}= …………$
* $sin^{'}= …………$
 |

**Propriété**

|  |
| --- |
| * Les variations des fonctions $cos$ et $sin$ sur $[0;π]$ sont données par les tableaux ci-contre.
* Les courbes représentatives de $cos$ et $sin$ sont appelées des sinusoïdes.

 |

**Preuve :** ……

**MÉTHODE 2 – Dériver une fonction formée de cos et sin**

*En général, ce type de fonction définie est dérivable sur* $R$*. Si ce n’est pas le cas, on établira d’abord les ensembles de définition et de dérivabilité (Méthode 1).*

**Exemple**

Calculer $f'(x)$. L’écrire sous une forme facilitant l’étude de son signe.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) $f(x)=sin\left(3x-\frac{π}{4}\right)$ | $$2) f(x)=cos^{2}x$$ | 3) $f(x)=sinx\left(1+cosx\right)$ |

**Propriété**

|  |
| --- |
| $\lim\_{x\to 0}\frac{cosx-1}{x}= …$ $\lim\_{x\to 0} \frac{sinx}{x}= …$  |

**Preuve**

….

**MÉTHODE 3 – Étudier une fonction trigonométrique**

*Il arrive fréquemment qu’une fonction trigonométrique soit périodique et paire ou impaire. Cela amène alors souvent à étudier d’abord la fonction sur un intervalle restreint avant de l’étudier sur un ensemble plus grand.*

**Exemple**

Soit la fonction $f$ définie sur $R$ par $f(x)=\frac{3sinx}{2+cosx}$ .

* 1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0;π]$. En déduire les variations de $f$ sur $[0;π]$.
	2. Calculer $f(-x)$. En déduire les variations de $f$ sur $[-π;π]$.
	3. Montrer que $f$ est $2π$-périodique.
	4. Tracer la courbe représentative $C$ de $f$ sur $[0;π]$ puis sur $[-4π;4π]$.