Dérivation – Fonctions cosinus et sinus

I. Rappels

1) Dérivabilité et fonction dérivée

Définition – Nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soient a et h deux réels tels que a et $a+h$ appartiennent à I.

On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l, tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$.

Le réel l est alors appelé le nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$

Définition – Fonction dérivable, fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur I si f est dérivable en tout réel x de I.

La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ définie sur I est appelée la fonction dérivée de f sur I.

Remarques :

- Une fonction peut être définie en a mais non dérivable en a.

  Par exemple, prenons la fonction racine carrée qui est définie en 0.

  On a:

  $$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

  $$\text{Or, } \lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

  Donc, la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

- Les physiciens expriment une variation à l'aide du symbole Δ.

  Ainsi, entre x et x_0, elle est notée:

  $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

  On a alors : $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

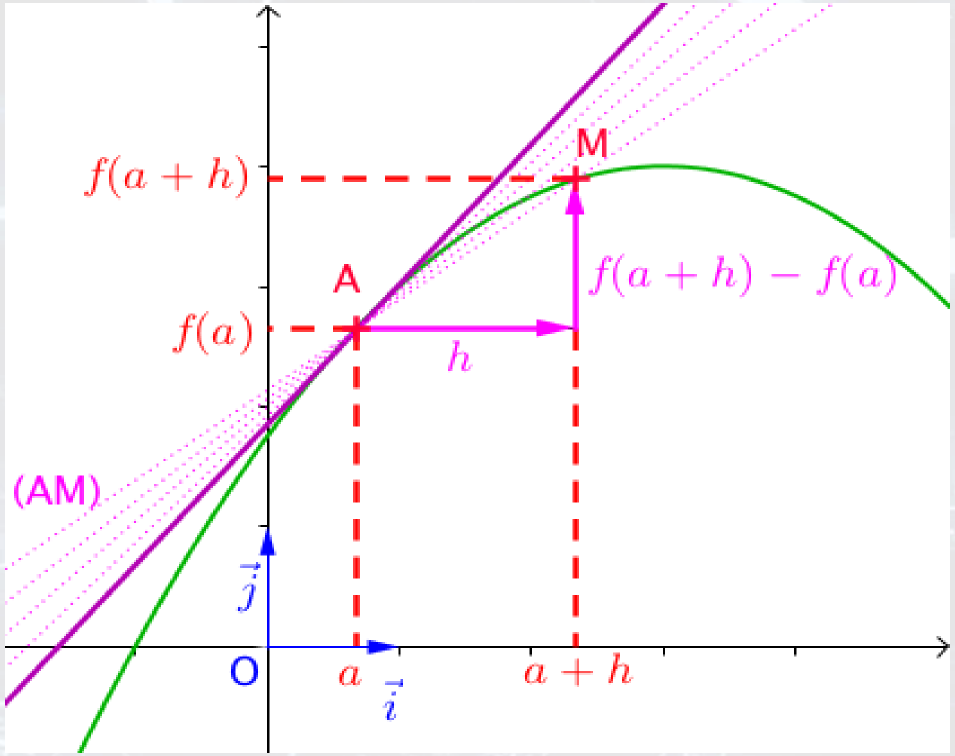
- On peut noter $f'(a)$ également $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ qui exprime la différentielle de la fonction f en a par rapport à la variable x. Cela sert à écarter toute ambiguïté s'il y a d'autres variables.

2) Application de la dérivation

Définition – Tangente en un point à une courbe

Soit une fonction f dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère.
La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A
de coefficient directeur le nombre dérivé $l = f'(a)$.
Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est :

$$\boldsymbol{y = f'(a)(x - a) + f(a)}.$$



Exemple :

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x - 1$.
On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2+3(2+h)-1-9}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+7h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}(h+7) \\
&= 7
\end{aligned}$$

Le coefficient directeur de la tangente est égal à 7.

Donc son équation est de la forme : $y = 7(x-2) + f(2)$, soit : $y = 7(x-2) + 9$

$$y = 7x - 5$$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est

$$y = 7x - 5$$

Propriétés - Du signe de $f'(x)$ aux variations de f

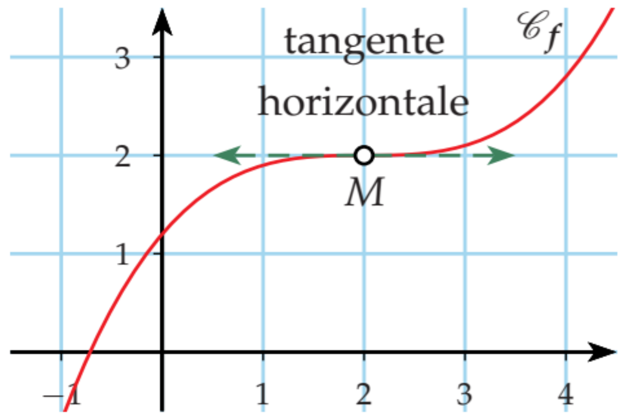
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

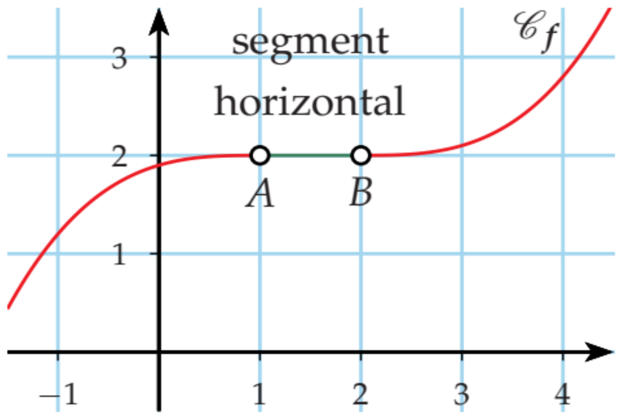
Remarque

« sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule »

signifie que la courbe représentative de f peut admettre des tangentes horizontales mais ne peut avoir à aucun endroit la forme d'un segment parallèle à l'axe des abscisses.



f' est strictement positive sauf en 2 où elle s'annule donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



*f' est strictement positive sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]2\,;\infty[$ donc f n'est pas **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$.*

3) Calcul de dérivées

Propriété - Dérivées des fonctions usuelles

On désigne par D_f l'ensemble de définition de la fonction *f*.
Toutes les fonctions du tableau ci-dessous sont dérivables sur D_f à l'exception de la fonction racine carrée qui n'est pas dérivable en zéro.

Fonction *f*	**Ensemble de définition de *f***	**Dérivée *f '***
$f(x) = a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples

a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^6$ alors *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout *x* de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^5$

b) Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^4}$ alors *f* est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout *x* de $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = -\frac{4}{x^5}$.

Propriété - Opération sur les fonctions dérivées

Soit un réel k et deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I.

- Les fonctions $u+v,\ ku$ et uv sont dérivables sur I.
- Les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I sauf là où v s'annule.

Fonction	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
Dérivée	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Exemples

a) $f(x)=(2x^2-5x)(3x-2)$

b) $g(x)=\frac{6x-5}{x^3-2x^2-1}$

Démonstration de la formule du produit :

Soient deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I alors, pour tout réel $a \in I$ et h tel que $a + h \in I$:

$$u'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \qquad \text{et} \qquad v'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{v(a+h) - v(a)}{h}$$

Posons $w = u \times v$
Par définition du produit de deux fonctions :

$$\begin{aligned} w(a+h) - w(a) &= (uv)(a+h) - (uv)(a) \\ &= u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a) \\ &= u(a+h) \times v(a+h) \ \boldsymbol{- u(a) \times v(a+h) + u(a) \times v(a+h)} \ - u(a) \times v(a) \\ &= \big(u(a+h) - \boldsymbol{u(a)}\big) \times \boldsymbol{v(a+h)} + \boldsymbol{u(a)} \times \big(\boldsymbol{v(a+h)} - v(a)\big) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{w(a+h) - w(a)}{h} &= \frac{\big(u(a+h) - u(a)\big) \times v(a+h) + u(a) \times \big(v(a+h) - v(a)\big)}{h} \\ &= \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h) - v(a)}{h} \end{aligned}$$

Démonstration de la formule du produit :

$$\frac{w(a+h)-w(a)}{h}=\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+u(a)\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

Par passage à la limite, les fonctions étant continues sur I:

$$\lim_{h\to 0}\frac{w(a+h)-w(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(u'(a)\times v(a+h)+u(a)\times v'(a)\right)$$

$$=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$$

Ceci prouve que la fonction w est dérivable pour tout réel $a\in I$, elle est donc dérivable sur I et :

$$w'=(uv)'=u'v+uv'$$

A vous de jouer !

Montrer la formule de l'inverse et celle du quotient.

II. Dérivées de fonctions composées

Dans cette partie, u désigne une fonction et I un intervalle.

Propriété - Dérivée de $\sqrt{u}$

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Preuve

Soit un réel $a \in I$ et un réel $h > 0$ tel que $a + h$ soit dans I.

On calcule le taux d'accroissement de $\sqrt{u}$ entre a et $a + h$.

$$\frac{\sqrt{u(a+h)} - \sqrt{u(a)}}{h} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h\left(\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}\right)} = \frac{u(a+h) - u(a)}{h} \times \frac{1}{\sqrt{u(a+h)} + \sqrt{u(a)}}$$

Or, la fonction u est dérivable sur I donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$.

D'où $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{h} = u'(a) \times \frac{1}{2\sqrt{u(a)}} = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$).

Exemple

$f(x) = \sqrt{3x^2 + 4x - 1}$

Propriété – Dérivée de u^n et u^{-n}

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si u est dérivable sur I alors :

- La fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

- La fonction u^{-n} est dérivable sur I sauf là où u s'annule et $(u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}$.

Preuve

- On démontre par récurrence. Voici l'initialisation et l'hérédité :

  $(u^1) = u' = 1 \times u'u^{1-1}$. La proposition est donc initialisée au rang 1.
  Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété « $\left(u^k\right) = ku'u^{k-1}$ » soit vraie.
  $\left(u^{k+1}\right) = \left(u^k u\right) = \left(u^k\right)u + u^k u' = ku'u^{k-1}u + u^k u' = (k+1)u'u^k$.
  La propriété est encore vraie au rang suivant donc elle est héréditaire.

- Si u est dérivable sur I, alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I sauf là où u s'annule.

  $(u^{-n}) = \left(\frac{1}{u^n}\right) = \left[\left(\frac{1}{u}\right)^n\right] = n\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{u}\right)^{n-1}$ d'après la première propriété.
  Ainsi : $(u^{-n}) = n\left(-\frac{u\prime}{u^2}\right)\frac{1}{u^{n-1}} = -\frac{nu\prime}{u^{n+1}} = -nu'u^{-n-1}$.

Exemple

$f(x) = (2x^2 + 3x - 3)^4$

Propriété – Dérivée de $x \longmapsto u(ax+b)$

Soit deux réels a et b.

Si u est dérivable sur I alors :

La fonction $f : x \mapsto u(ax+b)$ est dérivable là où $(ax+b) \in I$ et

$$f'(x) = au'(ax+b)$$

Preuve

Soit u dérivable sur I et deux réels a et b tels que $x \in I \Rightarrow (ax+b) \in I$.

- Si $a = 0$, alors $f : x \mapsto u(b)$ est constante et on a bien $f'(x) = 0 = 0 \times u'(b)$.

- Prenons $a \neq 0$. La fonction u est dérivable sur I donc :

pour tous $X \in I$ et H réel tels que $(X+H) \in I$:

$$\lim_{H \to 0} \frac{u(X+H) - u(X)}{H} = u'(X)$$

Posons $X = ax + b$ et $H = ah$.

Alors, H tend vers 0 vu que h tend vers 0 et que $a \neq 0$. Ainsi :

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(ax+b+ah) - u(ax+b)}{ah} = u'(ax+b)$$

soit

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(a(x+h)+b) - u(ax+b)}{h} = au'(ax+b)$$

MÉTHODE 1 - Dériver une fonction composée

1. On reconnaît le type de composée ($\sqrt{u}$, u^n, u^{-n} ou $x \mapsto u(ax+b)$) et on identifie u.
2. On détermine les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction.
3. On calcule $u'(x)$ et on applique la formule de dérivation qui convient.

Exemple

Déterminer les ensembles de définition $\mathcal{D}$ et de dérivabilité $\mathcal{D}'$ de f, puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

2) $f(x) = \left(\frac{3x-1}{2x-4}\right)^2$

3) $f(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{x}-1\right)^3}$

4) $f(x) = (2x-3)^5$

Les exemples de formules de dérivation des composées vues précédemment mettent en évidence une expression unifiée de la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$. On donne, ci-après, la propriété générale mais sa connaissance n'est pas une capacité attendue.

Propriété (admise)

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$.

La fonction $f \circ u$ composée de u suivie de f est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times (f' \circ u)(x) \quad \text{ou} \quad [f(u(x))]' = u'(x) \times f'(u(x))$$

→ Exercices de la fiche

11 ▶ MÉTHODE 1

Déterminer l'ensemble de dérivabilité $\mathscr{D}'$ de chaque fonction et calculer sa dérivée sur $\mathscr{D}'$:

1) $f : x \mapsto \sqrt{3x-7}$

2) $g : x \mapsto (5x^3-3)^2$

3) $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x+6)^3}$

4) $a : x \mapsto \left(1-2\sqrt{x}\right)^2$

5) $b : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$

6) $c : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{10-x}}$

12 Soit f une fonction définie sur I par $f(x)$.

Justifier que f est dérivable sur I puis calculer $f'(x)$.

1) $f(x) = \dfrac{5}{3\,(x-2)^4}$ $\qquad I =]2\,;\,+\infty[$

2) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^3}$ $\qquad I =]-1\,;\,+\infty[$

3) $f(x) = \left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2$ $\qquad I =]2\,;\,+\infty[$

4) $f(x) = (x-2)^3 + \dfrac{1}{(2x-1)^3}$ $\qquad I = \left]\dfrac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$

19 Soit la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}.$$

1) Montrer que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f'(x) = \frac{x+4\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2}.$$

2) Résoudre l'équation $X^2+4X-1=0$.

En déduire le signe de $f'(x)$.

3) Dresser le tableau de variation complet de f.

20 Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}-2x \;\text{ et }\; g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1) Montrer que $g'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Montrer que $f'(x) = g(x)-2$.

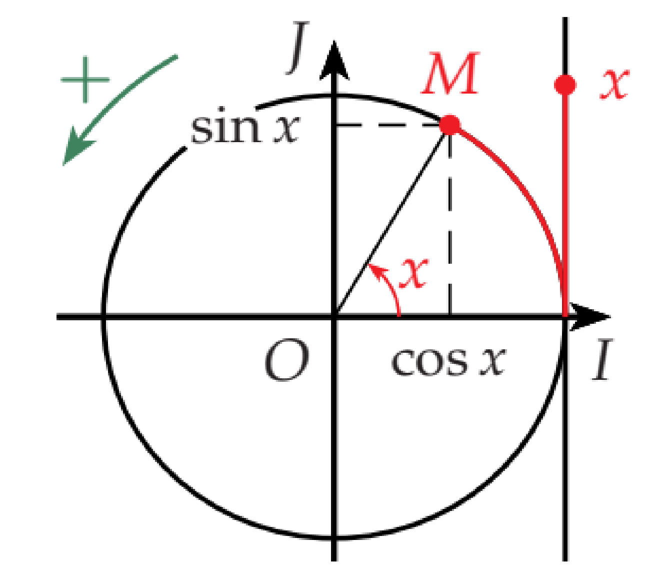
En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f.

III. *Fonctions cosinus et sinus*

1) Définition et rappels

Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé direct. Le point M, image d'un réel x sur le cercle trigonométrique de centre O, a pour coordonnées $(\cos x\ ;\ \sin x)$ où $\cos x$ est le cosinus de x et $\sin x$ est le sinus de x.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



<u>Propriété</u> – Fonction cosinus et sinus

- La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\cos: x \mapsto \cos x$.
- La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\sin: x \mapsto \sin x$.

2) Propriétés des fonctions cosinus et sinus

Définition - Fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et un réel T.

f est périodique de période T ou est T-périodique si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

Définition - Fonctions paire et impaire

Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0.

- Une fonction f est paire si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$.
- Une fonction f est impaire si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition - Fonctions paire et impaire

- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.
- La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire

Définition

- Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.
- La fonction cos est paire et la fonction sin est impaire

Preuve

Pour tout réel x, on a en effet :

- $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$.
- $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$.

Remarque

- Dans un repère, les courbes représentatives de cos et sin « se répètent » tous les 2π.
- Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de cos est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle de sin est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3) Dérivabilité et variations

Propriété (admise) - Dérivées des fonctions cos et sin

Les fonctions cos et sin sont dérivables et continues sur $\mathbb{R}$.

- $\cos' = -\sin$
- $\sin' = \cos$

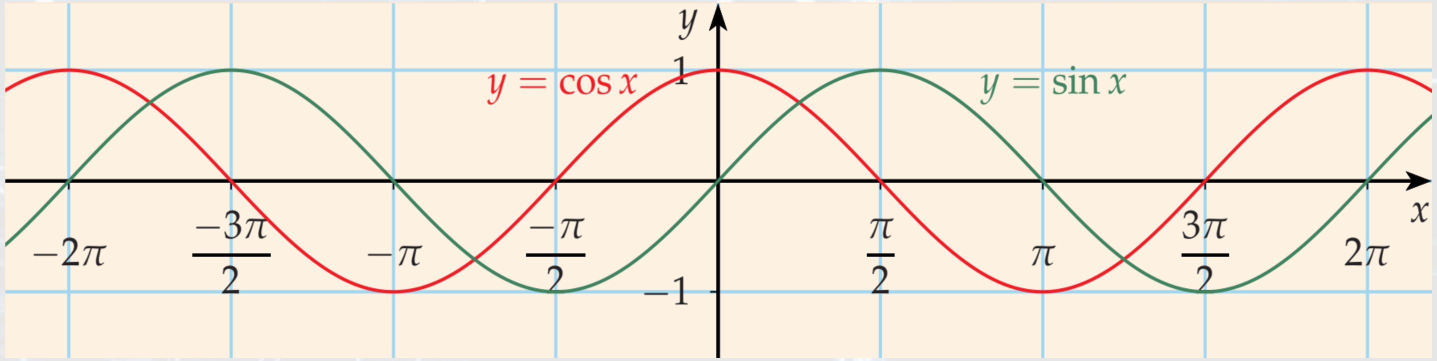
Propriété

Les variations des fonctions cos et sin sur $[0; \pi]$ sont données par les tableaux ci-contre.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1 ↘	0 ↘	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0 ↗	1 ↘	0

Les courbes représentatives de cos et sin sont appelées des sinusoïdes.



MÉTHODE 2 – Dériver une fonction formée de cos et sin

En général, ce type de fonction définie est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si ce n'est pas le cas, on établira d'abord les ensembles de définition et de dérivabilité (Méthode 1).

Exemple

Calculer $f'(x)$. L'écrire sous une forme facilitant l'étude de son signe.

1) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
2) $f(x) = \cos^2 x$
3) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$

Propriété

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Preuve:

Les fonctions cos et sin sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. Ainsi :

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) = -\sin 0 = 0.$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1.$

MÉTHODE 3 – Étudier une fonction trigonométrique

Il arrive fréquemment qu'une fonction trigonométrique soit périodique et paire ou impaire. Cela amène alors souvent à étudier d'abord la fonction sur un intervalle restreint avant de l'étudier sur un ensemble plus grand.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3\sin x}{2+\cos x}$.

1. Calculer $f'(x)$. Étudier son signe sur $[0;\pi]$. En déduire les variations de f sur $[0;\pi]$.
2. Calculer $f(-x)$. En déduire les variations de f sur $[-\pi;\pi]$.
3. Montrer que f est 2π-périodique.
4. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f sur $[0;\pi]$ puis sur $[-4\pi;4\pi]$.