**Dérivation – Fonctions cosinus et sinus**

1. ***Rappels***
   1. **Dérivabilité et fonction dérivée**

**Définition – Nombre dérivé**

est une fonction définie sur un intervalle de .

Soient et deux réels tels que et appartiennent à .

On dit que la fonction est dérivable en s'il existe un nombre réel , tel que : .

Le réel est alors appelé le nombre dérivé de en *a* et est noté .

**Définition – Fonction dérivable, fonction dérivée**

Soit une fonction définie sur un intervalle de .

La fonction est dérivable sur si est dérivable en tout réel de .

La fonction définie sur est appelée la fonction dérivée de *f* sur .

**Remarques :**

* Une fonction peut être définie en mais non dérivable en .

Par exemple, prenons la fonction racine carrée qui est définie en 0.

On a . Or,

Donc, la fonction racine carrée n’est pas dérivable en 0.

* Les physiciens expriment une variation à l’aide du symbole . Ainsi, entre et , elle est notée et . On a alors : .
* On peut noter également qui exprime la différentielle de la fonction en par rapport à la variable . Cela sert à écarter toute ambiguïté s’il y a d’autres variables.
  1. **Application de la dérivation**

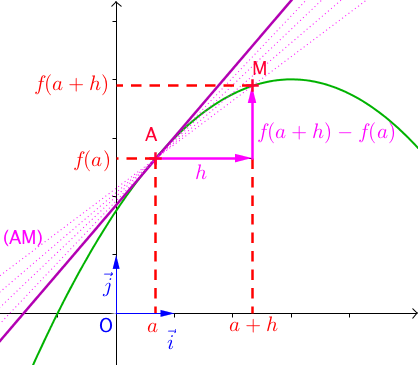
**Définition – Tangente en un point à une courbe**

Soit une fonction *f* dérivable en un nombre réel appartenant à .

Soit la courbe représentative de dans un repère

La tangente à la courbe au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé .

Une équation de la tangente à la courbe au point d’abscisse est :



**Exemple :**

On considère la fonction trinôme *f* définie sur par .

On veut déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2.

Le coefficient directeur de la tangente est égal à 7.

Donc son équation est de la forme : , soit :

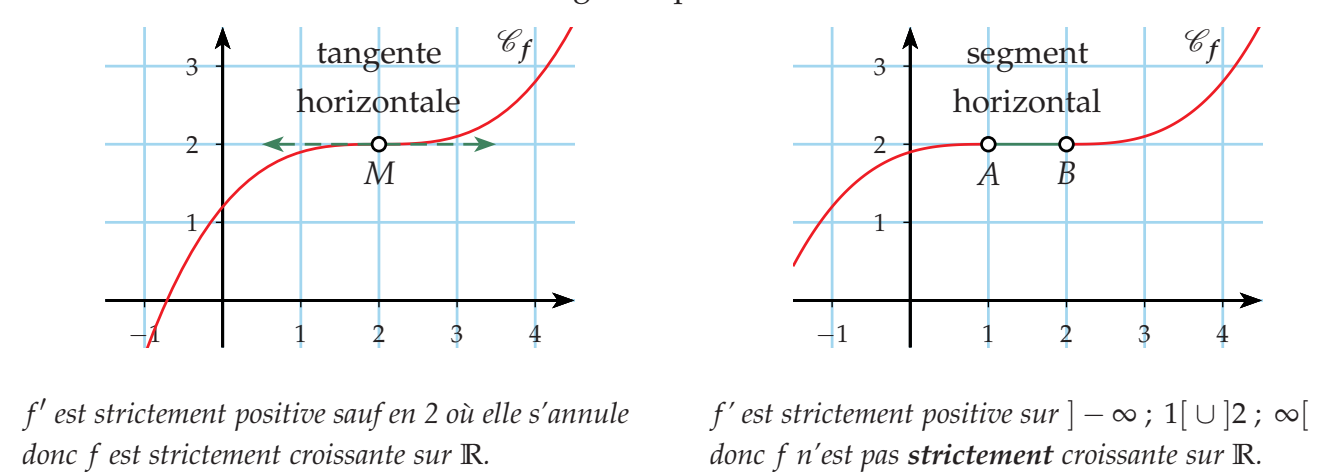
Une équation de tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2 est .

**Propriétés - Du signe de aux variations de**

|  |
| --- |
| Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle de .   * Si est strictement positive sur , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s’annule, alors est strictement croissante sur . * Si est strictement négative sur , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s’annule, alors est strictement décroissante sur . * Si est nulle sur , alors est constante sur . |

**Remarque**

« sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s’annule » signifie que la courbe représentative de peut admettre des tangentes horizontales mais ne peut avoir à aucun endroit la forme d’un segment parallèle à l’axe des abscisses.



* 1. **Calcul de dérivées**

**Propriété - Dérivées des fonctions usuelles**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| On désigne par l’ensemble de définition de la fonction .  Toutes les fonctions du tableau ci-dessous sont dérivables sur à l’exception de la fonction racine carrée qui n’est pas dérivable en zéro.   |  |  |  | | --- | --- | --- | | **Fonction *f*** | **Ensemble de définition de *f*** | **Dérivée *f* '** | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |  |  |  | |

**Exemples**

1. Soit la fonction *f* définie sur par alors *f* est dérivable sur et on a pour tout *x* de ,
2. Soit la fonction *f* définie sur par alors *f* est dérivable sur et sur et on a pour tout *x* de .

**Propriété - Opération sur les fonctions dérivées**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Soit un réel et deux fonctions et dérivables sur un intervalle .   * Les fonctions , et sont dérivables sur . * Les fonctions et sont dérivables sur sauf là où s’annule.  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | Fonction |  |  |  |  |  | | Dérivée |  |  |  |  |  | |

**Preuve du produit**

et tel que

et dérivables sur

Par définition du produit de deux fonctions :

Ou aussi

**Exemples**

2. ***Dérivées de fonctions composées***

Dans cette partie, désigne une fonction et un intervalle.

**Propriété - Dérivée de**

|  |
| --- |
| Si est dérivable et strictement positive sur , alors est dérivable sur et |

**Preuve**

Soit un réel et un réel tel que soit dans .

On calcule le taux d’accroissement de entre et .

Or, la fonction est dérivable sur donc .

D’où .

**Exemple**

**Propriété – Dérivée de et**

|  |
| --- |
| Soit . Si est dérivable sur alors :   * + La fonction est dérivable sur et .   + La fonction est dérivable sur sauf là où s’annule et . |

**Preuve**

* On démontre par récurrence. Voici l’initialisation et l’hérédité :

. La proposition est donc initialisée au rang 1.

Supposons qu’il existe un entier tel que la propriété « » soit vraie.

.

La propriété est encore vraie au rang suivant donc elle est héréditaire.

* Si est dérivable sur , alors est dérivable sur sauf là où s’annule.

d’après la première propriété.

Ainsi : .

**Exemple**

**Propriété – Dérivée de**

|  |
| --- |
| Soit deux réels et . Si est dérivable sur alors :  La fonction est dérivable là où et |

**Preuve**

Soit dérivable sur et deux réels et tels que .

* + Si , alors est constante et on a bien .
  + Prenons . La fonction est dérivable sur donc :

pour tous et réel tels que  :

Posons et .

Alors, tend vers 0 vu que tend vers 0 et que . Ainsi :

soit

**MÉTHODE 1 - Dériver une fonction composée**

* 1. On reconnaît le type de composée (, , ou ) et on identifie .
  2. On détermine les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction.
  3. On calcule et on applique la formule de dérivation qui convient.

**Exemple**

Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de , puis calculer .

1)

2)

3)

4)

1. est du type avec .

Or, est un trinôme de degré 2 ayant deux racines : et .

Ainsi, si ou et est définie sur .

Et comme est dérivable sur sauf là où s’annule alors .

On a d’où .

2. est du type avec .

Or, est définie sur donc est définie sur .

est dérivable sur son ensemble de définition donc .

On a .

D’où, .

3. est du type avec .

Or, est définie sur et aussi sauf là où s’annule. Donc, .

La fonction n’est pas dérivable en 0 donc et aussi. Ainsi, .

On a d’où .

4. On pourrait voir le type . Voyons plutôt le type avec , et .

Il est évident que vu que est une fonction polynôme de degré 5 !

On a d’où .

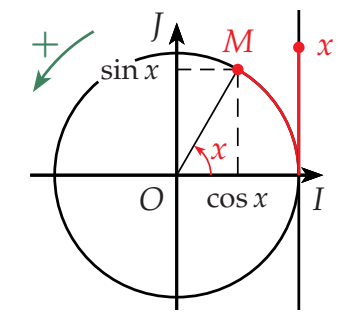
Les exemples de formules de dérivation des composées vues précédemment mettent en évidence une expression unifiée de la dérivée de . On donne, ci-après, la propriété générale mais sa connaissance n’est pas une capacité attendue.

**Propriété (admise)**

|  |
| --- |
| Soit une fonction dérivable sur un intervalle de et une fonction dérivable sur un intervalle de telle que pour tout , .  La fonction composée de suivie de est dérivable sur , et pour tout : |

1. ***Fonctions cosinus et sinus***
   1. **Définition et rappels**

Soit un repère orthonormé direct. Le point , image d’un réel sur le cercle trigonométrique de centre , a pour coordonnées où est le cosinus de et est le sinus de .



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Propriété – Fonction cosinus et sinus**

|  |
| --- |
| * La fonction cosinus, notée , est la fonction définie sur par . * La fonction sinus, notée , est la fonction définie sur par . |

* 1. **Propriétés des fonctions cosinus et sinus**

**Définition - Fonction périodique**

|  |
| --- |
| Soit une fonction définie sur et un réel .  est périodique de période ou est -périodique si, pour tout , . |

**Définition - Fonctions paire et impaire**

|  |
| --- |
| Soit une fonction définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0.   * Une fonction est paire si, pour tout , . * Une fonction est impaire si, pour tout , . |

**Définition - Fonctions paire et impaire**

|  |
| --- |
| * Les fonctions et sont -périodiques. * La fonction est paire et la fonction est impaire. |

**Preuve**

Pour tout réel , on a en effet :

* et .
* et .

**Remarque**

* Dans un repère, les courbes représentatives de et « se répètent » tous les .
* Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées et celle de est symétrique par rapport à l’origine du repère.

* 1. **Dérivabilité et variations**

**Propriété (admise) - Dérivées des fonctions et**

|  |
| --- |
| Les fonctions et sont dérivables et continues sur . |

**Propriété**

|  |
| --- |
| * Les variations des fonctions et sur sont données par les tableaux ci-contre. * Les courbes représentatives de et sont appelées des sinusoïdes. |

**Preuve**

* . Or, c’est-à -dire .

De plus, la fonction ne s’annule qu’en et .

Donc, est strictement décroissante sur .

* . Or, et .

De plus, la fonction ne s’annule qu’en .

Donc, est strictement croissante sur et strictement décroissante sur.

**MÉTHODE 2 – Dériver une fonction formée de cos et sin**

En général, ce type de fonction définie est dérivable sur . Si ce n’est pas le cas, on établira d’abord les ensembles de définition et de dérivabilité (Méthode 1).

**Exemple**

Calculer . L’écrire sous une forme facilitant l’étude de son signe.

1)

3)

***Correction***

1. est de la forme avec , et .

On a d’où .

2. est de la forme avec .

On a d’où .

3. est de la forme dont la dérivée est avec et .

.

Or, donc . D’où .

Posons . Alors, après calcul des racines.

Ainsi, .

**Propriété**

|  |
| --- |
|  |

Les fonctions et sont dérivables sur donc en particulier en . Ainsi :

* .
* .

**MÉTHODE 3 – Étudier une fonction trigonométrique**

Il arrive fréquemment qu’une fonction trigonométrique soit périodique et paire ou impaire. Cela amène alors souvent à étudier d’abord la fonction sur un intervalle restreint avant de l’étudier sur un ensemble plus grand.

**Exemple**

Soit la fonction définie sur par .

* 1. Calculer . Étudier son signe sur . En déduire les variations de sur .
  2. Calculer . En déduire les variations de sur .
  3. Montrer que est -périodique.
  4. Tracer la courbe représentative de sur puis sur .

***Correction***

1. est dérivable sur comme quotient de fonctions dérivables sur avec .

est du signe de sur .

Or :

* sur , ;
* sur , .

Et ne s’annule qu’en .

D’où le tableau de variation ci-contre.

1. donc est impaire*.*

On peut donc limiter l’étude de à . On peut en déduire que la fonction est décroissante sur et sur et croissante sur .

1. donc est -périodique.
2. On trace sur puis sur par symétrie centrale puisque est impaire.

Enfin, comme est -périodique, on répète le motif tous les par translation.

