|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1ère Spécialité | Corrigé DS n°2 de Mathématiques | Samedi 17 février 2024 |

Exercice 1 ( 6 points)

Une entreprise produit du tissu. Le coût total de production ( en € ) de l’entreprise est modélisé par la fonction $C$, définie par :

$C(x) = 15 x^{3} – 120 x^{2} + 500x + 750 $où $x$ est la longueur de tissu fabriqué exprimée en kilomètre, $x$ étant compris entre 0 et 10.

Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 € .

On note $B(x) $le résultat de l’entreprise, c’est-à-dire **la différence entre la recette et le coût de production**, pour la vente de $x$ kilomètres de tissu.

1. Calculer le coût total de production puis la recette pour la vente de 3 kilomètres de tissu.

En déduire le résultat de l’entreprise pour la vente de 3 kilomètres de tissu.

$$C\left(3\right)=15×3^{3}-120×3^{2}+500×3+750=1 575$$

Le coût de production est donc égal à 1 575 €.

La recette est égale à $680×3=2 040$ car chaque kilomètre de tissu est vendu 680 €.

On en déduit que le résultat de l’entreprise est égal à $2040-1575=465 €$.

1. Montrer que : $B(x) = -15 x^{3} + 120 x^{2} + 180 x – 750$.

Chaque kilomètre de tissu est vendu 680 € donc pour $x $kilomètres vendus, la recette est égale à $680×x$

$$\begin{matrix}B\left(x\right)&=&680x-C\left(x\right)\\&=&680x-\left(15 x^{3} – 120 x^{2} + 500x + 750 \right)\\&=&680x-15 x^{3}+ 120 x^{2}- 500x- 750\\&=&-15 x^{3} + 120 x^{2} + 180 x – 750\end{matrix}$$

1. Déterminer $B’(x), $où $B’$ est la dérivée de la fonction $B$.

$$\begin{matrix}B^{'}\left(x\right)&=&-15×3x^{2}+120×2x+180×1-0\\&=&-45x^{2}+240x+180\end{matrix}$$

1. Etudier le signe de $B’(x) $sur $R$.

$B'$ est un polynôme du second degré avec $a=-45 , b=240 $et $c=180$

$$Δ=240^{2}-4×\left(-45\right)×180=90 000=300^{2}$$

$Δ>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes :

$$x\_{1}=\frac{-240-300}{2×\left(-45\right)}=6 et x\_{2}=\frac{-240+300}{2×\left(-45\right)}=-\frac{2}{3}$$

Comme $a=-45<0$, on peut (d’après le cours) en déduire le tableau de signe de $B'$ sur $R$.



1. En déduire le tableau des variations de $B$ sur l’intervalle $\left[0 ;10\right]$.



1. Combien de kilomètres de tissu l’entreprise doit-elle produire afin d’obtenir un résultat maximal ?

La fonction $B$ admet un maximum en $x=6$ valant $1 410$ (car $B^{'}$s’annule en changeant de signe en $x=6$) donc l’entreprise doit produire 6 km de tissus afin d’obtenir un résultat maximal.

**Exercice 2 ( 5 points)**

1. Répondre par VRAI ou par FAUX au 2 questions suivantes en justifiant.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. La suite $\left(u\_{n}\right) $définie pour tout $n\in N$ par $u\_{n}=n-2 $ est strictement décroissante.

$$u\_{n+1}-u\_{n}=\left(n+1\right)-2-\left(n-2\right)=n+1-2-n+2=1>0$$

$u\_{n+1}-u\_{n}>0$donc la suite est strictement croissante.

FAUX

1. La suite $\left(u\_{n}\right) $définie pour tout $n\in N$ par $u\_{n}=\left(-1\right)^{n}$ est monotone.

Si $n$ est pair, $u\_{n}=1$ et si $n$ est impair, $u\_{n+1}=-1$

La suite n’a donc pas de variations et, par conséquent, n’est pas monotone.

FAUX

1. Soit $\left(v\_{n}\right) $la suite définie pour tout $n\in N$ par $v\_{n}=\frac{2^{n}}{7^{n-1}}.$

Exprimer $v\_{n+1}$ en fonction de $n$ et en déduire les variations de $\left(v\_{n}\right)$.

$$v\_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{7^{(n+1)-1}}=\frac{2^{n+1}}{7^{n}}$$

$$v\_{n+1}-v\_{n}=\frac{2^{n+1}}{7^{n}}-\frac{2^{n}×7}{7^{n-1}×7}=\frac{2×2^{n}-7×2^{n}}{7^{n}}=\frac{\left(2-7\right)2^{n}}{7^{n}}=\frac{-5×2^{n}}{7^{n}}=-5×\frac{2^{n}}{7^{n}}$$

$-5<0 et \frac{2^{n}}{7^{n}}>0 donc v\_{n+1}-v\_{n}<0$ , ce qui prouve que la suite $\left(v\_{n}\right)$ est strictement décroissante.

1. Compléter le tableau suivant.



**Exercice 3 – 3 points**

QCM – Recopier sur votre copie le numéro de la question (1. Puis 2. Et enfin 3. ) et la lettre correspondant à votre réponse ( a, b, c ou d)

***Question 1***

On considère la fonction $f $définie sur $R$ par $f(x) = 2x^{2}+6x–8$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est juste ?

|  |  |
| --- | --- |
| $$a) f(x) = 2 \left( x-4\right)\left( x-1\right)$$ | $$b) f(x) = (2x + 8 ) ( 2x-2 )$$ |
| $$c) f(x) = 2 (x + 4 ) ( x-1 )$$ | $$d) f(x) = 2 ( x + 3 ) ( x-2 )$$ |

$$f\left(x\right)=2x^{2}+6x-8 est un polynôme du second degré$$

$$Δ=6^{2}-4×2×\left(-8\right)=100>0$$

$Δ>0 donc $le polynôme admet donc deux racines distinctes $x\_{1}=\frac{-6+10}{2×2}=1$ et $x\_{2}=\frac{-6-10}{2×2}=-4$

$f$ peut donc s’écrire sous forme factorisée : $f\left(x\right)=2\left(x-\left(-4\right)\right)\left(x-1\right)=2\left(x+4\right)\left(x-1\right)$

***Réponse c.***



***Question 2***

Soit$ f $la fonction définie par $f(x) = ax^{2}+bx+c$ où $a, b $et $c$ sont des nombres réels

On considère dans un repère la courbe représentative de f tracée ci-dessous.

On appelle $∆$ son discriminant. On peut affirmer

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. $a > 0$ ou $c < 0$
 | 1. $c$ et $∆$ sont du même signe
 | 1. $a<0$ et $c<0$
 | 1. $a<0$ et $∆ <0$
 |

D’après le graphique :

* $a<0$ car la fonction est croissante puis décroissante
* $Δ>0$ car la courbe coupe 2 fois l’axe des abscisses
* $f\left(0\right)=c$ donc $c>0$

**Réponse *b.***

***Question 3***

Le tableau de signes de la fonction polynôme défini sur $R$ par $f\left(x\right)= x^{2}+2x+ 5$ est :



D’après la calculatrice, la parabole est strictement au-dessus de l’axe des abscisses donc $f\left(x\right)>0$

**Réponse *c.***

Exercice 4 – 6 points

Un médicament est administré à un patient par voie intraveineuse.

**Partie A : modèle discret de la quantité médicamenteuse**

Après une première injection de 1 mg de médicament, le patient est placé sous perfusion.

On estime que, toutes les $30$ minutes, l’organisme du patient élimine 10 % de la quantité de médicament présente dans le sang et qu’il reçoit une dose supplémentaire de $0,25$ mg de la substance médicamenteuse.

On étudie l’évolution de la quantité de médicament dans le sang avec le modèle suivant :

pour tout entier naturel $n$, on note $u\_{n}$ la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de $n$ périodes de trente minutes. On a donc $u\_{0}=1$.

1. Calculer la quantité de médicament dans le sang au bout d’une demi-heure.

D’après l’énoncé, $u\_{1}$ est la quantité, en mg, de médicament dans le sang du patient au bout de trente minutes.

Au bout de 30 min, 10 % de 1 mg ont disparu : il en reste donc 0,9 mg et on donne alors 0,25 mg supplémentaires : on a donc $u\_{1}=1,15$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel $n, u\_{n+1}=0,9u\_{n}+0,25$.

Si $u\_{n}$ est la quantité de médicament présente au bout de $n$ périodes de 30 min, à la $(n+1)$ème période 10 % auront disparu.

Il en restera donc $0,9u\_{n}$ et on donne alors 0,25 mg de médicament supplémentaire ; on a donc

$$u\_{n+1}=0,9u\_{n}+0,25$$

1. On estime que le médicament est réellement efficace lorsque sa quantité dans le sang du patient est supérieure ou égale à $1,8$ mg.

(a) Recopier et compléter le script écrit en langage Python suivant de manière à déterminer au bout de combien de périodes de trente minutes le médicament commence à être réellement efficace.

|  |
| --- |
|  **def** efficace(): |
|  u=1 |
|  n=0 |
|  **while** **u < 1.8**: |
|  u=**0.9\*u+0.25** |
|  n = n+1 |
|   **return** n |

(b) Quelle est la valeur renvoyée par ce script ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l’exercice.

Le script renvoie $n=8$, car $u\_{8}≈1,854>1,8$.

Le médicament est réellement efficace après 4 heures.

1. Soit $\left(v\_{n}\right)$ la suite définie, pour tout entier naturel $n$, par $v\_{n}=2,5-u\_{n}$.
2. Montrer que $\left(v\_{n}\right)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme $\left(v\_{0}\right)$.

$$\begin{matrix}v\_{n+1}&=&2,5-u\_{n+1}\\&=&2,5-\left(0,9u\_{n}+0,25\right)\\&=&2,25-0,9u\_{n}\\&=&0,9\left(2,5-u\_{n}\right)\\&=&0,9v\_{n}\end{matrix}$$

Finalement : $v\_{n+1}=0,9v\_{n}$ ; cette égalité montre que la suite $\left(v\_{n}\right)$ est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $v\_{0}=2,5-u\_{0}=2,5-1=1,5$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n, u\_{n}=2,5-1,5×0,9^{n}$.

On sait que $\left(v\_{n}\right)$ est une suite géométrique de raison 0,9 de premier terme $v\_{0}$ donc$ ,v\_{n}=v\_{0}×0,9^{n}$, soit

$$v\_{n}=1,5×0,9^{n}$$

On sait également que $u\_{n}=2,5-v\_{n}$ donc quel que soit $n\in N, $

$$ u\_{n}=2,5-1,5×0,9^{n}$$

(c) Le médicament devient toxique lorsque sa quantité présente dans le sang du patient dépasse $3$ mg.

D’après le modèle choisi, le traitement présente-t-il un risque pour le patient ? Justifier.

Pour tout réel $n$, $1,5×0,9^{n}>0$ donc $2,5-1,5×0,9^{n}<2,5$

Conclusion : à aucun moment le traitement ne sera dangereux pour le patient.

