|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Première Spé** | **Évaluation de mathématiques n°6****Variations - Extremum (45 mn)** | **Jeudi 1er fév 2024** |

NOM :…………………. Prénom :……………………….

**Exercice 1**

10 points

Soit $f $ la fonction définie sur $R$ par :

$$f\left(x\right)=x^{3}+\frac{5}{2}x^{2}-2x+2$$

1. Justifier que $f$ est dérivable sur $R$ et calculer $f'(x)$.

La fonction $f$ est un polynôme, elle est donc dérivable sur $R$.

$$f^{'}\left(x\right)=3x^{2}+\frac{5}{2}×2x-2×1+0=$$

1. Etudier le signe de $f'$ sur $R$.

La fonction $f'$ est un polynôme du second degré avec $a=3 , b=5 , c=-2$

$$Δ=5^{2}-4×3×\left(-2\right)=49$$

$Δ>0$ donc le polynôme admet deux racines distinctes :

$$x\_{1}=\frac{-5-\sqrt{49}}{2×3}=-2 et x\_{1}=\frac{-5+\sqrt{49}}{2×3}=\frac{1}{3} $$

D’après le cours, étant donné que $a>0$, on obtient le tableau de signe suivant.



1. Dresser le tableau de variation de $f.$



1. La fonction $f$ admet-elle des extremums ? Précisez.

La fonction $f$ admet deux extremums. Un maximum local en $x=-2$ valant $8$ et un minimum local

en $x=\frac{1}{3}$ valant $\frac{89}{54}$.

**Exercice 2**

10 points

Soit $g $ la fonction définie par : $g\left(x\right)=\frac{3}{2x^{2}+1}$

1. Justifier que la fonction $g$ est définie et dérivable sur $R$.

Pour tout réel $x$, $2x^{2}\geq 0 ⇔ 2x^{2}+1\geq 1$ donc $2x^{2}+1\ne 0.$

Comme $x⟼2x^{2}+1$ est dérivable et non nulle, on peut en déduire que $g$ est définie et dérivable sur $R$.

1. Montrer que $g^{'}\left(x\right)=-\frac{12x}{\left(2x^{2}+1\right)^{2}} $pour $x\in R$.

$g$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u\left(x\right)=3$ et $v\left(x\right)=2x^{2}+1$ donc $u^{'}\left(x\right)=0$ et $v^{'}\left(x\right)=4x$.

$$g^{'}\left(x\right)=\frac{0×\left(2x^{2}+1\right)-3(4x)}{\left(2x^{2}+1\right)^{2}}=\frac{-12x}{\left(2x^{2}+1\right)^{2}}$$

1. Etudier le signe de $g'$ sur $R$ et dresser le tableau de variation de $g$.

$2x^{2}+1>0$ donc $g^{'}$ a le même signe que $-x$ sur $R$.

* Si $x>0$ , $-x<0$ donc $g^{'}\left(x\right)<0$
* si $x<0$ , $-x>0$ donc $g^{'}\left(x\right)>0$
* si $x=0$ , $g^{'}\left(x\right)=0$
1. La fonction $f$ admet-elle des extremums ? Précisez.

$g'$ s’annule en changeant de signe en $x=0$ donc $g$ admet un extremum en $x=0$ valant $g(0)=3$.

C’est ici un maximum.

**Exercice - Bonus**

2 points

Etudier les extremums de la fonction $h $définie et dérivable sur $R$ par :

$$h\left(x\right)=\frac{1}{4}x^{4}+\frac{1}{3}x^{3}-x^{2}-2x+1$$

En tant que fonction polynôme, $h$ est dérivable sur $R$.

$$h^{'}\left(x\right)=\frac{1}{4}×4x^{3}+\frac{1}{3}×3x^{2}-2x-2=x^{3}+x^{2}-2x-2=x^{2}\left(x+1\right)-2\left(x+1\right)=\left(x^{2}-2\right)\left(x+1\right)$$

Ou encore : $f^{'}\left(x\right)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x+1\right)$

A l’aide d’un tableau de signe, on montre que $h'$ s’annule trois en changeant de signe donc $h$ admet 3 extremums : deux minimums locaux en $\sqrt{2}$ et en $-\sqrt{2}$ et un maximum local en $x=-1$.